

附 录

西北工业大学高等代数课程考试真题及解答

A 卷(I)

一、填空(共 20 分,每小题 4 分)

1. $\lambda =$ _____ 时,多项式 $f(x) = x^2 + \lambda x$ 与 $g(x) = x^2 + 4x + \lambda$ 有公共根.

2. 对称多项式 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$ 可用初等对称多项式的多项式表为 $f(x_1, x_2, x_3) =$ _____.

3. $\lambda =$ _____ 时,齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$
 有非零解.

4. 设 A 是 n 阶方阵,且 $|A| = 2$,则 $\left| \left(-\frac{1}{4}A \right)^{-1} + A^* \right| =$ _____.

5. $\lambda =$ _____ 时,二次型 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2\lambda x_2x_3$ 的秩为 2.

二、(10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & y & y & \cdots & y \\ y & a_2 & y & \cdots & y \\ y & y & a_3 & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (y \neq a_i, i = 1, 2, \dots, n)$$

三、(15 分) λ 取何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解?在有无穷多解时,求通解(用向量形式表示).

四、(10 分) 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 且 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 8E$, 试求矩阵 X .

五、(15 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(1) t 为何值时, f 是正定的;

(2) 取 $t = 1$, 试用可逆线性变换化二次型为标准形, 并写出所用的线性变换.

六、(共 12 分, 每小题 6 分)

(1) 多项式 $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + 12x + 6$ 在有理数域上是否可约?为什么?



- (2) 若实对称矩阵 A 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 合同, 求二次型 $x^T A x$ 的规范型.

七、(共 18 分, 每小题 6 分)

- (1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 P 上的一元多项式, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, 证明

$$(f(x), f(x) + g(x)) = 1$$

- (2) 已知 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解向量, 而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组的基础解系, 证明: $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

- (3) 设 A, B, C, D 都是 n 阶方阵, 且 $|D| \neq 0, CD = DC$, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - BC|$$

A 卷 (I) 参考解答

一、1. $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$; 2. $f = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$; 3. $\lambda = -6$ 或 $\lambda = 2$; 4. $(-1)^n 2^{r-1}$; 5. $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}i$

$$\begin{aligned} \text{二、} D_n &\xrightarrow{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & a_1 & y & \cdots & y \\ 0 & y & a_2 & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \vdots \\ r_{n+1} - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ -1 & a_1 - y & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n - y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 + \frac{1}{a_1 - y}c_2 \\ c_1 + \frac{1}{a_2 - y}c_3 \\ \vdots \\ c_1 + \frac{1}{a_n - y}c_{n+1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{y}{a_i - y} & y & y & \cdots & y \\ 0 & a_1 - y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - y \end{vmatrix} = (a_1 - y) \cdots (a_n - y) \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{y}{a_i - y} \right] \end{aligned}$$

$$\text{三、} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 4)$$

- (1) 当 $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 4$ 时, 方程组有唯一解;

- (2) 当 $\lambda = -1$ 时, 增广矩阵

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

$r(B) = 3, r(A) = 2$, 方程组无解;

- (3) 当 $\lambda = 4$ 时, 增广矩阵

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2 \times \frac{1}{5} \\ r_1 - r_2 \\ r_3 + 2r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r(B) = r(A) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解, 此时同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \end{cases}$, 通解为

$$\begin{cases} x_1 = -3t \\ x_2 = 4 - t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ 任意})$$



四、可求得 $|A^*| = -27$. 由 $AA^* = |A|E$ 得 $|A||A^*| = |A|^4$, 即 $|A|^3 = |A^*| = -27$, 于是 $|A| = -3$. 用 A^{-1} 左乘 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 8E$ 得 $XA^{-1} = A^{-1}XA^{-1} + 8A^{-1}$, 再右乘 A 得 $X = A^{-1}X + 8E$, 即 $(E - A^{-1})X = 8E$, 从而

$$X = 8(E - A^{-1})^{-1} = 8\left(E - \frac{1}{|A|}A^*\right)^{-1} = 24(3E + A^*)^{-1} =$$

$$24 \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

五、(1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$, 选取 t 使得

$$\Delta_1 = t > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 > 0, \quad \Delta_3 = |A| = (t+1)^2(t-2) > 0$$

故当 $t > 2$ 时, 二次型 f 正定.

$$(2) f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$

$$[x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3)] + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3$$

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \text{得}$$

$$f = y_1^2 - 4y_2y_3$$

$$\text{再令} \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases}, \text{得标准形为}$$

$$f = z_1^2 - 4z_2^2 + 4z_3^2$$

所用的可逆线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - 2z_2 \\ x_2 = z_2 + z_3 \\ x_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$$

六、(1) 不可约. 取素数 $p=3$, 则 $p \nmid 5$, 但 $p \mid -6$, $p \mid 12$, $p \nmid 6$, 而 $p^2 \nmid 6$, 由艾森斯坦判别法知 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

$$(2) \text{由于} \quad x^T Bx = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 = x_1^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 6x_3^2 = y_1^2 - y_2^2 + 6y_3^2$$

所以 B 的秩为 3 且正惯性指数为 2. 因为 A 与 B 合同, 所以 A 的秩也为 3, 且正惯性指数为 2, 故 $x^T Ax$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

七、(1) 因为 $(f(x), g(x)) = 1$, 所以存在多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

于是, 有

$$(u(x) - v(x))f(x) + v(x)(f(x) + g(x)) = 1$$

故

$$(f(x), f(x) + g(x)) = 1$$

(2) 法 1 反证. 若 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关, 则 η^* 可由 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性表出, 从而有 $A\eta^* = 0$, 这与 η^* 是 $Ax = b$ 的解向量矛盾, 故 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

法 2 设 $k\eta^* + k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$, 左乘矩阵 A 得

$$kA\eta^* + k_1A\xi_1 + \dots + k_{n-r}A\xi_{n-r} = 0$$

即 $kb = 0$. 由 $b \neq 0$ 得 $k = 0$, 从而有

$$k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0,$$

但 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性无关, 故只有 $k_1 = \dots = k_{n-r} = 0$, 于是 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.





(3) 因为 $\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$, 取行列式得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A-BD^{-1}C| |D| = |AD-BD^{-1}CD| = |AD-BC|$$

A 卷(II)

一、填空(共 20 分, 每小题 4 分)

1. 向量空间 P^n 的子空间 $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_1 + x_2 = 0, x_k \in P\}$ 的维数为 _____, 它的一个基为 _____.

2. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1, -1, 2, 则矩阵 $B = A^3 - 2A^2$ 的特征值为 _____, 行列式 $|B| =$ _____.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x =$ _____, $y =$ _____.

4. 如果矩阵 A 的全部初等因子为 $\lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda + 2)^2$, 则 A 的不变因子为 _____.

5. 设由 n 维线性空间 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 A , 则由相应的对偶基 f_1, f_2, \dots, f_n 到对偶基 g_1, g_2, \dots, g_n 的过渡矩阵为 _____.

二、(15 分) 已知 $P^{2 \times 2}$ 的变换

$$\mathcal{A}(X) = AXB, \quad \forall X \in P^{2 \times 2}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 证明 \mathcal{A} 是线性变换;

(2) 求 \mathcal{A} 在 $P^{2 \times 2}$ 的基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵;

(3) 问 \mathcal{A} 是否可在 $P^{2 \times 2}$ 的某个基下的矩阵为对角阵? 若可以, 试求出这个基和相应的对角矩阵.

三、(10 分) 已知 P^3 的线性变换

$$\mathcal{A}(a, b, c) = (a + 2b - c, b + c, a + b - 2c)$$

(1) 求 \mathcal{A} 的值域 $\mathcal{A}(P^3)$ 的维数和一个基;

(2) 求 \mathcal{A} 的核 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的维数和一个基.

四、(12 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$ 的不变因子、初等因子及 Jordan 标准形.

五、(15 分) 求一正交变换, 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

化为标准形.

六、(10 分) 已知 P^3 的基 $\alpha_1 = (1, 0, -1), \alpha_2 = (-1, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$, 求对偶基 f_1, f_2, f_3 .

七、(共 18 分, 每小题 6 分)

(1) 设 V 是数域 P 上所有 n 阶方阵的集合, V 对于通常的矩阵加法和如下定义的数量乘法

$$k \circ A = A, \quad \forall A \in V, k \in P$$

是否构成线性空间? 为什么?

(2) 若 λ 是正交矩阵 A 的特征值, 证明 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 A 的特征值.

(3) 试证线性空间 V 上双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 为反对称函数的充分必要条件是: 对任意 $\alpha \in V$ 都有 $f(\alpha, \alpha) = 0$.

A 卷(II) 参考答案

一、1. $\dim W = n - 2$, 一个基为 $\alpha_1 = (1, -1, 0, \dots, 0), \alpha_2 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \alpha_{n-2} = (0, \dots, 0, 1, 0);$





2. \mathbf{B} 的特征值为 $-1, -3, 0$, $|\mathbf{B}|=0$; 3. $x=0, y=-2$;

4. \mathbf{A} 的不变因子为 $1, 1, 1, \lambda-1, (\lambda-1)^2(\lambda+2)^2$; 5. 过渡矩阵为 $(\mathbf{A}^T)^{-1}$.

二、(1) 对任意 $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in P^{2 \times 2}$ 和任意 $k, l \in P$, 有

$$\mathcal{A}(k\mathbf{X} + l\mathbf{Y}) = \mathbf{A}(k\mathbf{X} + l\mathbf{Y})\mathbf{B} = k\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} + l\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{B} = k\mathcal{A}(\mathbf{X}) + l\mathcal{A}(\mathbf{Y})$$

所以 \mathcal{A} 是线性变换.

(2) 可求得

$$\mathcal{A}(\mathbf{E}_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{A}(\mathbf{E}_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}(\mathbf{E}_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{A}(\mathbf{E}_{22}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 \mathcal{A} 在基 $\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}$ 下的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 可求得 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda^2(\lambda-2)(\lambda+2)$, 所以 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2$, 对应的特征向量分别为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而所求的基 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ 满足

$$(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4) = (\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

即
$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

且 \mathcal{A} 在该基下的矩阵为

$$\text{diag}(0, 0, 2, -2)$$

三、(1) 取 P^3 的基 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, 则 $\mathcal{A}(P^3) = L(\mathcal{A}(\mathbf{e}_1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_2), \mathcal{A}(\mathbf{e}_3))$. 可求得向量组

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = (2, 1, 1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = (-1, 1, -2)$$

的秩为 2, 且 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_2)$ 是一个极大线性无关组, 故 $\dim \mathcal{A}(P^3) = 2$, 且它的一个基为 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = (2, 1, 1)$.

(2) 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{0})$, 即

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3) = (0, 0, 0)$$

求解齐次方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{得通解} \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = -t \quad (t \text{ 任意}) \\ x_3 = t \end{cases}$$
 从而 $\alpha = t(3, -1, 1)$, 可见 $\dim \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{0}) = 1$, 且

$(3, -1, 1)$ 是它的一个基.

四、可求得

$$\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ 5 & \lambda-21 & -17 \\ -6 & 26 & \lambda+21 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

所以 \mathbf{A} 的不变因子为

$$1, 1, \lambda^2(\lambda+1)$$





初等因子为

$$\lambda^2, \lambda+1$$

Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

五、二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 可求得 $|\lambda E - A| = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$.

又对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的特征向量为 $p_1 = (-1, 1, 0)^T, p_2 = (-1, 0, 1)^T$. 正交化得

$$\alpha_1 = p_1 = (-1, 1, 0)^T, \quad \alpha_2 = p_2 - \frac{[p_2, \alpha_1]}{[\alpha_1, \alpha_1]} \alpha_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^T$$

再单位化

$$q_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, \quad q_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$$

而对应 $\lambda_3 = 5$ 的特征向量为 $p_3 = (1, 1, 1)^T$, 单位化得 $q_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$. 故正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

化二次型为 $f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$.

六、设 $f_i(\alpha) = a_i x + b_i y + c_i z$ ($i=1, 2, 3$), 其中 $\alpha = (x, y, z)$, 则由

$$\begin{cases} f_1(\alpha_1) = a_1 & -c_1 = 1 \\ f_1(\alpha_2) = -a_1 + b_1 & = 0 \\ f_1(\alpha_3) = & c_1 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1, \text{ 即 } f_1 = x + y \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

而由

$$\begin{cases} f_2(\alpha_1) = a_2 & -c_2 = 0 \\ f_2(\alpha_2) = -a_2 + b_2 & = 1 \\ f_2(\alpha_3) = & c_2 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 1, \text{ 即 } f_2 = y \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

最后, 由

$$\begin{cases} f_3(\alpha_1) = a_3 & -c_3 = 0 \\ f_3(\alpha_2) = -a_3 + b_3 & = 0 \\ f_3(\alpha_3) = & c_3 = 1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_3 = 1 \\ b_3 = 1, \text{ 即 } f_3 = x + y + z \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

七、(1) 不构成. 因为 $(k+l) \circ A = A \neq 2A = k \circ A + l \circ A$.

(2) 设 x 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量, 即 $Ax = \lambda x$, 两边左乘 A^T 得 $A^T Ax = \lambda A^T x$, 即 $x = \lambda A^T x$, 也即 $A^T x = \frac{1}{\lambda} x$, 可见 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^T 的特征值. 由于 A 与 A^T 有相同的特征值, 所以 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A 的特征值.

(3) 若 f 是反对称的, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有 $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$. 取 $\beta = \alpha$ 得 $f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha)$, 即有 $f(\alpha, \alpha) = 0$.

反之, 若对任意 $\alpha \in V$ 有 $f(\alpha, \alpha) = 0$, 则

$$0 = f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta) = f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)$$

故 $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$, 即 f 是反对称双线性函数.

B 卷 (I)

一、填空 (共 24 分, 每小题 4 分)

1. 当 m, n 满足_____时, $x^2 + mx + 1 \mid x^3 + nx^2 + 5x + 2$.





2. 已知 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3+ax+b=0$ 的根, 则 3 阶行列式
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 设 4 阶方阵 $A=(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $B=(\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 均为 4 维列向量, 已知行列式 $|A|=4$, $|B|=1$, 则 $|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知方阵 A 满足 $A^3-A^2-4A+5E=O$, 则 $(A-2E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量, 且

$$\eta_1 + \eta_2 = (1, 1, 0, 0)^T, \quad \eta_3 = (0, 0, 1, 1)^T$$

则该方程组的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. k 满足 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 二次型 $f = -x_1^2 - 2x_2^2 + (k-1)x_3^2 - 2kx_1x_2 - 2x_1x_3$ 是负定的.

二、(10 分) 已知对称多项式

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 - 2x_1^2x_3 - 2x_1x_3^2 - 2x_2^2x_3 - 2x_2x_3^2$$

(1) 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 表示为初等对称多项式的多项式;

(2) 若 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ 的三个根, 试求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的值.

三、(10 分) 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix}$$

四、(15 分) 已知向量组 $\alpha_1 = (-2, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, -2)^T$, $\beta = (-2, \lambda, \lambda^2)^T$, 问 λ 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 并写出表达式.

五、(10 分) 设 A, B, C 均为 n 阶方阵, 且 A 和 B 是可逆的, 证明矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$ 可逆, 并求 M^{-1} .

六、(10 分) 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 为标准形, 并写出所用的可逆线性变换.

七、(共 21 分, 每小题 7 分)

(1) 设 p 是一个素数, 多项式 $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$. 证明: $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E 是 n 阶单位矩阵, 且 $m > n$. 已知 $BA = E$, 试判断矩阵 A 的列向量组是否线性相关? 为什么?

(3) 已知 A 是实反对称矩阵, 试证 $E - A^2$ 为正定矩阵, 其中 E 是单位矩阵.

B 卷 (I) 参考答案

一、1. $m=2, n=4$; 2. 行列式的值为 0; 3. $|A+B|=40$; 4. $(A-2E)^{-1} = -A^2 - A + 2E$;

5. $(0, 0, 1, 1)^T + k(1, 1, -2, -2)^T$ (k 任意); 6. $-1 < k < 0$.

二、(1) f 的首项为 x_1^3 , 其方幂对应的有序数组为 $(3, 0, 0)$, 令 $\varphi_1 = \sigma_1^{3-0} \sigma_2^{0-0} \sigma_3^0 = \sigma_1^3$, 则

$$f_1 = f - \varphi_1 = f - (x_1 + x_2 + x_3)^3 = -5x_1^2x_2 - 5x_1x_2^2 - 5x_1^2x_3 - 5x_1x_3^2 - 5x_2^2x_3 - 5x_2x_3^2 - 6x_1x_2x_3$$

又 f_1 的首项为 $-5x_1^2x_2$, 其方幂对应的有序数组为 $(2, 1, 0)$, 令 $\varphi_2 = -5\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = -5\sigma_1\sigma_2$, 则

$$f_2 = f_1 - \varphi_2 = f_1 + 5(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9x_1x_2x_3 = 9\sigma_3$$

故

$$f = f_1 + \varphi_1 = f_2 + \varphi_2 + \varphi_1 = \sigma_1^3 - 5\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3$$

(2) 可求得 $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 1$, 所以 $f = 2^3 - 5 \cdot 2 \cdot 0 + 9 \cdot 1 = 17$.





三、该行列式具有行和相等的特点.

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} x + \sum_{i=1}^n a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x + \sum_{i=1}^n a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \vdots \\ r_{n+1} - r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} x + \sum_{i=1}^n a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_2 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix} =$$

$$(x + \sum_{i=1}^n a_i)(x - a_1) \cdots (x - a_n)$$

四、设 $\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3$, 比较分量得

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 得

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} r_3 + r_1 \\ r_3 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 2\lambda - 2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda - 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} r_1 \times (-\frac{1}{3}) \\ r_2 + 2r_1 \\ r_1 \leftrightarrow r_2 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{4-\lambda}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2(1-\lambda)}{3} \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{array} \right)$$

可见, 当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时, $r(B)=r(A)=2<3$, 方程组有无穷多解, 故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

$$\text{当 } \lambda=1 \text{ 时, 同解方程组为 } \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}, \text{ 通解为 } \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \text{ 为任意常数}), \text{ 此时}$$

$$\beta = (1+t)\alpha_1 + t\alpha_2 + t\alpha_3 \quad (t \text{ 为任意常数})$$

$$\text{当 } \lambda=-2 \text{ 时, 同解方程组为 } \begin{cases} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}, \text{ 通解为 } \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \text{ 为任意常数}), \text{ 此时}$$

$$\beta = (2+t)\alpha_1 + (2+t)\alpha_2 + t\alpha_3 \quad (t \text{ 为任意常数})$$

五、因为

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -(C-B)A^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \quad ①$$

取行列式得

$$|M| = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B| \neq 0$$

所以矩阵 M 可逆. 又对式①两边求逆得

$$\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & O \\ -(C-B)A^{-1} & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$$

即

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -(C-B)A^{-1} & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}CA^{-1} & -B^{-1} \\ A^{-1}-B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$





$$\text{六、令} \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \text{得}$$

$$f = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

$$\text{再令} \begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}, \text{得标准形}$$

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

所用的可逆线性变换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

七、(1) 因为 $f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$, 令 $x = y + 1$ 得

$$f(y+1) = \frac{(y+1)^p - 1}{y} = \sum_{k=1}^p C_p^k y^{k-1}$$

取素数 p , 则 $p \mid C_p^k (k=1, 2, \dots, p-1)$, 但 $p \nmid 1, p^2 \nmid C_p^1$, 从而由艾森斯坦判别法知, $f(y+1)$ 在有理数域上不可约, 从而 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

(2) A 的列向量组线性无关.

法 1 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 又设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = \mathbf{0}$, 即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

用 B 左乘上式并利用 $BA = E$ 得 $(k_1, k_2, \dots, k_n)^T = \mathbf{0}$, 即 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, 故 A 的列向量组线性无关.

法 2 由于 $n = r(E) = r(BA) \leq r(A) \leq n$, 所以 $r(A) = n$, 故 A 的列向量组线性无关.

(3) 因为 $(E - A^2)^T = E^T - (A^2)^T = E - (A^T)^2 = E - (-A)^2 = E - A^2$

所以 $E - A^2$ 是对称矩阵. 又对任意 $x \neq \mathbf{0}$, 有

$$x^T(E - A^2)x = x^T(E + A^T A)x = x^T x + (Ax)^T(Ax) > 0$$

故 $E - A^2$ 是正定矩阵.

B 卷(II)

一、填空(共 20 分, 每小题 4 分)

1. 已知数域 P 上线性空间 V 中线性无关的元素组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 令

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \quad \beta_4 = \alpha_4 + \alpha_1$$

则子空间 $W = \{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 \mid k_i \in P\}$ 的维数是_____, 它的一个基为_____.

2. 已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, 特征向量 α 对应的特征值 $\lambda_0 =$ _____.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形为 $J =$ _____.

4. 已知 \mathcal{A} 是 3 维线性空间 V 的线性变换, \mathcal{A} 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为





$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

则 \mathcal{A} 在 V 的基 $\beta_1 = \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = 2\alpha_1$ 下的矩阵为 _____.

5. 以 P^3 上的三个线性函数

$$f_1(x, y, z) = -z, \quad f_2(x, y, z) = y + z, \quad f_3(x, y, z) = x - y$$

为对偶基的 P^3 的基为 $\alpha_1 = \underline{\hspace{2cm}}, \alpha_2 = \underline{\hspace{2cm}}, \alpha_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、(10 分) 已知 3 维线性空间 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 设

$$\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$$

(1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 V 的一个基;

(2) 求由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标.

三、(12 分) 已知 $P[x]_3$ 的线性变换

$$\mathcal{A}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (4a_0 + 6a_1) + (-3a_0 - 5a_1)x + (-3a_0 - 6a_1 + a_2)x^2$$

选择 $P[x]_3$ 的一个基, 使 \mathcal{A} 在该基下的矩阵是对角矩阵.

四、(15 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 - 2bx_1x_3 - 2x_2x_3$$

经正交变换化为标准形 $f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2$, 试求参数 a, b 及所用的正交变换.

五、(10 分) 设 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 是 2 阶方阵构成的欧氏空间, 其内积为

$$[A, B] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}b_{ij}, \quad \forall A = (a_{ij})_{2 \times 2}, B = (b_{ij})_{2 \times 2} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$$

又设 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求由 A_1, A_2 生成的子空间 $W = L(A_1, A_2)$ 的正交补空间 W^\perp 的一个标准正交基.

六、(12 分) 已知 P^3 的双线性函数

$$f(x, y) = 2x_2y_1 + 3x_3y_1 - 2x_1y_2 - x_3y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3$$

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in P^3$$

(1) 问 $f(x, y)$ 是对称的还是反对称的? 为什么?

(2) 求 P^3 的一组基, 使 $f(x, y)$ 在该基下为规范形式.

七、(共 21 分, 每小题 7 分)

(1) 设 A 是 $2n+1$ 阶正交矩阵, 且 $|A|=1$, 证明 1 是 A 的一个特征值;

(2) 若 \mathcal{A}, \mathcal{B} 均是线性空间 V 的线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 试证 \mathcal{A} 的核 $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 是 \mathcal{B} 的不变子空间;

(3) 设 \mathcal{A} 是欧氏空间 V 的线性变换, 若对任意 $\alpha \in V$ 有 $[\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\alpha)] = [\alpha, \alpha]$, 证明 \mathcal{A} 是正交变换.

B 卷(II) 参考解答

一、1. $\dim W = 3$, 一个基为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; 2. $a = -3, b = 0, \lambda_0 = -1$;

$$3. J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4. \begin{pmatrix} a_{33} & a_{31} + a_{32} & 2a_{31} \\ a_{23} & a_{21} + a_{22} & 2a_{21} \\ \frac{1}{2}a_{13} - \frac{1}{2}a_{23} & \frac{1}{2}(a_{11} + a_{12}) - \frac{1}{2}(a_{21} + a_{22}) & a_{11} - a_{21} \end{pmatrix};$$

$$5. \alpha_1 = (1, 1, -1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 0), \quad \alpha_3 = (1, 0, 0).$$

二、(1) 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = \mathbf{0}$, 整理得

$$(-k_1 + k_2 - k_3)\alpha_1 + (k_2 - k_3)\alpha_2 + (k_1 + k_3)\alpha_3 = \mathbf{0}$$





由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是基, 于是有

$$\begin{cases} -k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \end{cases}$$

该方程组只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 从而是 V 的一组基.

(2) 由于 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A^{-1}$, 故由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$C = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

即 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $(1, 4, 2)^T$.

三、 \mathcal{A} 在 $P[x]_3$ 的基 $1, x, x^2$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

可求得 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$, 即 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$. 又求得对应的特征向量分别为

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所求的基 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 应满足

$$(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

即 $f_1(x) = x - 2, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^2 + x - 1$

\mathcal{A} 在该基下的矩阵为 $\text{diag}(1, 1, -2)$.

四、二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -b \\ -1 & 4 & -1 \\ -b & -1 & a \end{pmatrix}$ 正交相似于 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, 比较 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ 的同次幂

系数可解得 $a = 4, b = 1$.

可求得 A 对应 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为 $p_1 = (1, 1, 1)^T$, 单位化得 $q_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$; 对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ 的特征向量为 $p_2 = (-1, 1, 0)^T, p_3 = (-1, 0, 1)^T$, 正交化得

$$\alpha_2 = p_2 = (-1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = p_3 - \frac{[p_3, \alpha_2]}{[\alpha_2, \alpha_2]} \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$$

单位化得

$$q_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \quad q_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$$





故所用的正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

五、设 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in W^\perp$, 则由 $\begin{cases} [\mathbf{A}_1, \mathbf{X}] = x_1 + x_2 = 0 \\ [\mathbf{A}_2, \mathbf{X}] = x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 解得基础解系 $(1, -1, 1, 0)^\top, (1, -1, 0, 1)^\top$

故 $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 W^\perp 的一个基. 将其正交化

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 - \frac{[\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1]}{[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_1]} \mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

再单位化即得 W^\perp 的标准正交基

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

六、(1)取 P^3 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$, 可求得 f 在该基下的度量矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

这是反对称矩阵, 从而 f 是反对称双线性函数.

(2)可求得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_1 \times (-\frac{1}{2}) \\ c_1 \times (-\frac{1}{2}) \\ r_3 - \frac{3}{2}r_2 \\ c_3 - \frac{3}{2}c_2 \\ r_3 + r_1 \\ c_3 + c_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{C}^\top \mathbf{A} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所求的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) \mathbf{C}$, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$$

且对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P^3$, 若 \mathbf{x}, \mathbf{y} 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标分别为 $(u_1, u_2, u_3)^\top$ 和 $(v_1, v_2, v_3)^\top$, 则 f 在该基下的规范形式为 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_1 v_2 - u_2 v_1$.





七、(1)因为

$$|E-A| = |A^T A - A| = |A^T - E| |A| = |(A-E)^T| |A| = |A-E| = (-1)^{2n+1} |E-A| = -|E-A|$$

所以 $|E-A|=0$, 即 1 是 A 的一个特征值.

(2) 对任意 $\alpha \in \mathcal{A}^{-1}(\theta)$ 有 $\mathcal{A}(\alpha) = \theta$, 而 $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)) = (\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha) = (\mathcal{B}\mathcal{A})(\alpha) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha)) = \mathcal{B}(\theta) = \theta$

从而 $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathcal{A}^{-1}(\theta)$, 故 $\mathcal{A}^{-1}(\theta)$ 是 \mathcal{B} 的不变子空间.

(3) 因为对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $[\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}(\alpha+\beta)] = [\alpha+\beta, \alpha+\beta]$

①

又有

$$[\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}(\alpha+\beta)] = [\mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta), \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)] =$$

$$[\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\alpha)] + 2[\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)] + [\mathcal{A}(\beta), \mathcal{A}(\beta)] = [\alpha, \alpha] + 2[\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)] + [\beta, \beta]$$

$$[\alpha+\beta, \alpha+\beta] = [\alpha, \alpha] + 2[\alpha, \beta] + [\beta, \beta]$$

代入式①得

$$[\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\beta)] = [\alpha, \beta]$$

故 \mathcal{A} 是正交变换.

C 卷 (I)

一、计算题(共 40 分, 每小题 5 分)

1. 设 A 为 n 阶方阵, 如果 A 的行列式 $|A|=2$, 求 $|(2A)^* + (2A)^{-1}|$.

2. 设二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $AXB = E - XB$, 求 X .

3. 设方阵 A 满足 $A^2 - 2A + 2E = O$, 求 $(A + 2E)^{-1}$.

4. 三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 1, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量, 且

$$\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 3)^T, \quad \eta_2 + \eta_3 = (0, -1, 1)^T, \quad \eta_3 + \eta_1 = (1, 0, -1)^T$$

求该方程组的通解.

5. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性无关, 向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3, \beta_4 = \alpha_4 + \alpha_5$, 求向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的秩及一个极大无关组.

6. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交基, α, β 是 V 中的两个向量, 其中 $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \beta = \alpha_2 + 2\alpha_3$, 求 α 与 β 的内积 $[\alpha, \beta]$.

7. 已知 \mathcal{A} 是线性空间 V 的线性变换, 若 \mathcal{A} 在 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 求 \mathcal{A} 在基 $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 下的矩阵.

8. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求 $A\{1\}$.

二、(8 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a+1 \\ a & a & \cdots & a+2 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a+n-1 & \cdots & a & a \\ a+n & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

三、(10 分) λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (3-\lambda)x_3 = -\lambda - 3 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多解? 在有无穷多解时求通解(用向量形式表示).

四、(10 分) 设 W_1, W_2 是线性空间 $P^{2 \times 2}$ 的两个子空间, $W_1 = L(A_1, A_2), W_2 = L(B_1, B_2)$, 其中





$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(1) 求 $W_1 + W_2$ 的一个基与维数;

(2) 求 $W_1 \cap W_2$ 的一个基与维数.

五、(12分) \mathcal{A} 是线性空间 \mathbf{R}^3 的线性变换, $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, ax_2 + x_3)$.

(1) 问 a 为何值时 \mathcal{A} 是可逆变换?

(2) 在 \mathcal{A} 不是可逆变换时, 求 \mathcal{A} 的核 $\ker \mathcal{A}$ 与值域 $\mathcal{A}(V)$ 的维数和基.

六、(6分) 证明线性空间 $P[x]_n$ 可以分解为 $P[x]_n$ 中偶函数集合构成的子空间与奇函数集合构成子空间的直和.

七、(8分) 已知线性空间 P^4 的两个基

(I): $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 2, 0, 0)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\alpha_4 = (0, 0, 1, 2)$;

(II): $\beta_1 = (2, 1, 0, 0)$, $\beta_2 = (3, 1, 0, 0)$, $\beta_3 = (0, 0, 2, 3)$, $\beta_4 = (0, 0, 1, 2)$.

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\alpha = \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 - \beta_4$ 在基(I)下的坐标.

八、(6分) 已知 A 与 B 分别为 $m \times n$ 与 $k \times l$ 的矩阵, $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 求证 $r(C) = r(A) + r(B)$

C 卷(I) 参考答案

一、1. 因为 $(2A)^* (2A) = |2A| E = 2^n |A| E = 2^{n+1} E$, 所以 $(2A)^* = 2^{n+1} (2A)^{-1}$, 故

$$\begin{aligned} |(2A)^* + (2A)^{-1}| &= |(2^{n+1} + 1)(2A)^{-1}| = (2^{n+1} + 1)^n |(2A)^{-1}| = \frac{(2^{n+1} + 1)^n}{|2A|} \\ &= \frac{(2^{n+1} + 1)^n}{2^n |A|} = \frac{(2^{n+1} + 1)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

2. 由 $AXB = E - XB$ 得 $(A + E)XB = E$. 因为 $|A + E| \neq 0$, $|B| \neq 0$, 所以

$$X = (A + E)^{-1} B^{-1} = [B(A + E)]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

3. 设 $(A + 2E)(A + aE) = bE$, 展开得 $A^2 + (a + 2)A + (2a - b)E = O$, 从而 $a + 2 = -2$, $2a - b = 2$. 解得 $a = -4$, $b = -10$. 故

$$(A + 2E)^{-1} = \frac{4E - A}{10}$$

4. 非齐次方程组的特解为 $\eta^* = \frac{1}{2}(\eta_3 + \eta_1) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})^T$. 因为

$$\xi_1 = (\eta_1 + \eta_2) - (\eta_2 + \eta_3) = (1, 3, 2)^T, \quad \xi_2 = (\eta_2 + \eta_3) - (\eta_3 + \eta_1) = (-1, -1, 2)^T$$

是对应齐次方程组的线性无关解向量, 且基础解系含 $3 - r(A) = 2$ 个解向量, 故 ξ_1, ξ_2 是对应齐次方程组的基础解系, 从而方程组的通解为

$$x = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})^T + k_1(1, 3, 2)^T + k_2(-1, -1, 2)^T \quad (k_1, k_2 \text{ 任意})$$

5. 因为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 + r_2 \\ r_5 - r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $r(A) = 3$, 且 A 的第 1, 2, 4 列构成列向量组的极大无关组, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ 是一个极大无关组. 该向量组的秩为 3.





6. 因为 α, β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标分别为 $(1, -1, 1)^T, (0, 1, 2)^T$, 故

$$[\alpha, \beta] = (1, -1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

7. 因为 $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, 所以

$$\mathcal{A}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = \mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} + a_{32} \\ a_{23} - a_{13} & a_{22} - a_{12} & a_{21} + a_{22} - a_{11} - a_{12} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} + a_{12} \end{pmatrix}$$

故 \mathcal{A} 在基 $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} + a_{32} \\ a_{23} - a_{13} & a_{22} - a_{12} & a_{21} + a_{22} - a_{11} - a_{12} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} + a_{12} \end{pmatrix}$

8. 设 $X = (x_1, x_2) \in A\{1\}$, 代入 $AXA = A$ 得 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 解得 $x_2 = 1$, 故

$$A\{1\} = \{(x_1, 1) \mid x_1 \text{ 任意}\}$$

$$\text{二、 } D_n = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a+1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & -1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_n + \frac{1}{2}c_{n-1} \\ c_n + \frac{1}{3}c_{n-2} \\ \vdots \\ c_n + \frac{1}{n}c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a+1 + \frac{a}{2} + \cdots + \frac{a}{n} \\ & & & 2 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & n-1 & 0 \\ n & & & & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 + a \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) n!$$

$$\text{三、 } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_2 + r_3 \\ c_3 - c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

(1) 当 $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 8$ 时, 方程组有唯一解;

(2) 当 $\lambda = -1$ 时

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) = 1$, 方程组有无穷多解. 同解方程组为 $x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3$, 通解为

$$\mathbf{x} = (1, 0, 0)^T + k_1(-2, 1, 0)^T + k_2(2, 0, 1)^T \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

(3) 当 $\lambda = 8$ 时

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\substack{r_1 + 4r_2 \\ r_3 + r_2}} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -18 & -18 & 9 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 2r_3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$





$r(B)=3, r(A)=2$, 方程组无解.

四、(1) $W_1+W_2=L(A_1, A_2, B_1, B_2)$. 取 $P^{2 \times 2}$ 的基

$$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 A_1, A_2, B_1, B_2 在该基下的坐标分别为

$$(1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T, (0, 1, 1, 0)^T$$

将其按列排成矩阵 A 且可求得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

故 A_1, A_2, B_1, B_2 是 W_1+W_2 的基, 且 $\dim(W_1+W_2)=4$.

(2) 可求得 $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$. 利用维数公式得

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 4 = 0$$

故 $W_1 \cap W_2$ 无基.

五、(1) 取 \mathbf{R}^3 的基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$, 可求得

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) A$$

由于

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a - 1$$

所以当 $a \neq -1$ 时, \mathcal{A} 可逆.

(2) 当 $a = -1$ 时, \mathcal{A} 不可逆. 此时

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 $\mathcal{A}(\varepsilon_1) = (1, 1, 0), \mathcal{A}(\varepsilon_2) = (1, 0, -1)$ 是 $\mathcal{A}(V)$ 的基, 且 $\dim \mathcal{A}(V) = 2$.

求解 $Ax = 0$ 得基础解系 $(-1, 1, 1)^T$, 故 $-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (-1, 1, 1)$ 是 $\ker \mathcal{A}$ 的基, 且 $\dim \ker \mathcal{A} = 1$.

六、设 W_1, W_2 分别为 $P[x]_n$ 中偶函数与奇函数集合构成的子空间. 因为, 对 $\forall f(x) \in P[x]_n$ 有

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x)$$

且 $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \in W_1, f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \in W_2$, 所以 $P[x]_n = W_1 + W_2$.

又对 $\forall f(x) \in W_1 \cap W_2$, 有 $f(x) \in W_1$ 且 $f(x) \in W_2$, 即 $f(-x) = f(x), f(-x) = -f(x)$, 从而 $f(x) = -f(-x) = -f(x)$, 即 $f(x) = 0$. 这表明 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 故 $P_n(x) = W_1 \oplus W_2$.

七、(1) 取 P^4 的基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$, 则有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) A, \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) B$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

于是

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) A^{-1} B$$





故由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$P = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \alpha = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

故 α 在基(Ⅰ)下的坐标为 $(13, -5, 1, 0)^T$.

八、设 $r(A) = r_1, r(B) = r_2$, 则存在可逆矩阵 P_1, Q_1, P_2, Q_2 使得

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} E_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} E_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_1} & O & & \\ O & O & & \\ & & \vdots & \\ & & & E_{r_2} & O \\ & & & O & O \end{pmatrix}$$

故

$$r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r_1 + r_2 = r(A) + r(B)$$

C 卷(Ⅱ)

一、计算题(共 35 分, 每小题 5 分)

1. 已知三阶方阵 A 的特征值为 $0, -1, 1$, 求 $|A^2 + 2A - 4E|$.

2. 已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵相似, 求 a .

3. 已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的 Jordan 标准形与最小多项式.

4. t 取何值时, 二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的.

5. 已知置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\sigma^{-1} \circ \tau$.

6. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是酉空间 V 的一个标准正交基, α, β 是 V 中的两个向量, 其中 $\alpha = \alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3$, $\beta = \alpha_2 + 2i\alpha_3$, 求 α 与 β 的内积 $[\alpha, \beta]$.

7. a, b 满足什么条件时, 多项式 $x^3 + 6ax + b$ 有重因式.

二、(10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程 $2x^3 - 3x^2 + x - 7 = 0$ 的三个根, 计算

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_3 + \alpha_1)$$

三、(13 分) 设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交基, \mathcal{A} 是 V 的线性变换, 已知

$$\mathcal{A}(\gamma_1) = \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3, \quad \mathcal{A}(\gamma_2) = \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3, \quad \mathcal{A}(\gamma_3) = -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

(1) 证明 \mathcal{A} 是一个对称变换;





(2) 求 V 的一个标准正交基, 使 \mathcal{A} 在这个基下的矩阵是对角矩阵.

四、(12 分) 设二次型 $f = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 经正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 化为标准形 $f = y_1^2 + 4y_2^2$.

(1) 求 a, b 的值及正交矩阵 \mathbf{Q} ;

(2) 指出二次曲面 $f=1$ 的类型.

五、(10 分) 已知 \mathbf{R}^3 上的双线性函数:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1 \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$$

(1) 证明 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是反对称双线性函数;

(2) 求 \mathbf{R}^3 的一个基, 使 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 在该基下的表达式为规范形.

六、(8 分) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ 都是方阵, 证明 \mathbf{A} 的最小多项式 $m_{\mathbf{A}}(\lambda)$ 是 \mathbf{A}_1 的最小多项式

$m_{\mathbf{A}_1}(\lambda)$ 和 \mathbf{A}_2 的最小多项式 $m_{\mathbf{A}_2}(\lambda)$ 的首项系数为 1 的最小公倍式.

七、(7 分) 设 n 阶方阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{B} + 2\mathbf{A}$, 证明:

(1) 2 不是 \mathbf{B} 的特征值;

(2) 若 \mathbf{B} 相似于对角矩阵, 则存在可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 与 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ 都是对角矩阵.

八、(5 分) 已知 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, 证明 $r(\mathbf{A}^n) = r(\mathbf{A}^{n+1})$.

C 卷(II) 参考解答

一、1. 设 $f(x) = x^2 + 2x - 4$, 则 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} - 4\mathbf{E}$, 且 $f(\mathbf{A})$ 的特征值为

$$f(0) = -4, \quad f(-1) = -5, \quad f(1) = -1$$

故

$$|\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} - 4\mathbf{E}| = f(0)f(-1)f(1) = -20$$

2. 可求得

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -a \\ -1 & \lambda - 3 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

所以 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$. 当 \mathbf{A} 相似于对角阵时, 对应二重特征值 2 应有两个线性无关的特征向量, 即 $r(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 1$, 而

$$2\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -a \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $a = -6$ 时, \mathbf{A} 可对角化.

3. \mathbf{A} 是分块对角矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

由于 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}_1| = \lambda^2 - 2 = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$, 所以 \mathbf{A}_1 的特征值为 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, 故 \mathbf{A}_1 的 Jordan 标准形为

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

而 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}_2| = (\lambda - 2)^3$, 即 \mathbf{A}_2 的特征值为 2 (三重), 且由

$$2\mathbf{E} - \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知对应特征值 2 只有一个线性无关的特征向量, 所以 \mathbf{A}_2 的 Jordan 标准形为 $\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$.





故 \mathbf{A} 的 Jordan 标准形是

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & \\ & -\sqrt{2} & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

而 \mathbf{A} 的最小多项式为

$$m_A(\lambda) = (\lambda^2 - 2)(\lambda - 2)^3$$

4. 二次型的矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 由它的顺序主子式

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, \quad \Delta_3 = |\mathbf{A}| = -4(t+2)(t-1) > 0$$

联立解得 $-2 < t < 1$, 此时二次型 f 是正定的.

5. $\sigma^{-1} \circ \tau = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

6. $[\alpha, \beta] = [\alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 2i\alpha_3] =$
 $[\alpha_1, \alpha_2] + [\alpha_1, 2i\alpha_3] + [-i\alpha_2, \alpha_2] + [-i\alpha_2, 2i\alpha_3] + [\alpha_3, \alpha_2] + [\alpha_3, 2i\alpha_3] =$
 $-i + (-2i) = -3i$

7. 设 $f(x) = x^3 + 6ax + b$, 则 $f'(x) = 3x^2 + 6a$.

$$R(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6a & b \\ 3 & 0 & 6a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6a \end{vmatrix} \xrightarrow[r_5 \div r_3]{\substack{r_3 \div 3 \\ r_4 \div 3}} 27 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6a & b \\ 1 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2a \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - r_1} 27 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6a & b \\ 0 & 0 & -4a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4a & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2a \end{vmatrix} =$$

$$27 \begin{vmatrix} -4a & -b & 0 \\ 0 & -4a & -b \\ 1 & 0 & 2a \end{vmatrix} = 27(32a^3 + b^2)$$

故当 $32a^3 + b^2 = 0$ 时, 多项式有重因式.

二、对称多项式 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)$ 的首项指数组为 $(2, 1, 0)$, 不先于首项的指数组为 $(1, 1, 1)$. 故设

$$f = \sigma_1 \sigma_2 + A \sigma_3$$

取 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ 得 $f = 8, \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$, 代入上式得 $8 = 3 \times 3 + A$, 即 $A = -1$, 于是

$$f = \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3$$

由韦达定理知

$$\sigma_1 = \frac{3}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{7}{2}$$

故

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_3 + \alpha_1) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{11}{4}$$

三、(1) 由题设条件知 $\mathcal{A}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\mathbf{A}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因为 \mathcal{A} 在标准正交基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 下的矩阵 \mathbf{A} 是对称矩阵, 所以 \mathcal{A} 是对称变换.

$$(2) |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda + 2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1 + c_3]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & \lambda + 2 & -1 \\ \lambda & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 0 & \lambda + 3 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} =$$





$$\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$$

A 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=-3, \lambda_3=3$, 可求得对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^T, \quad \boldsymbol{p}_2=(1,-2,1)^T, \quad \boldsymbol{p}_3=(-1,0,1)^T$$

$$\text{单位化得正交矩阵 } \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ 使得 } \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

由 $(\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3) = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)\boldsymbol{Q}$ 得 V 的标准正交基

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\gamma}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\gamma}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\gamma}_3, \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{\gamma}_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{\gamma}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{\gamma}_3, \quad \boldsymbol{\delta}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\gamma}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\gamma}_3$$

\mathcal{A} 在该基下的矩阵是 $\text{diag}(0, -3, 3)$.

四、(1) 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (正交) 相似于 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, 即 \boldsymbol{A} 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=1$,

$\lambda_3=4$. 利用

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + a + 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 1 + 4 \text{ 和 } |\boldsymbol{A}| = -(b-1)^2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$$

解得 $a=3, b=1$. 于是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可求得 \boldsymbol{A} 对应特征值 $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=4$ 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=(-1,0,1)^T, \quad \boldsymbol{p}_2=(1,-1,1)^T, \quad \boldsymbol{p}_3=(1,2,1)^T$$

$$\text{单位化得正交矩阵 } \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(2) $f = y_2^2 + 4y_3^2 = 1$ 是椭圆柱面.

五、(1) 可求得 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在 \mathbf{R}^3 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的度量矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 \boldsymbol{A} 是反对称矩阵, 所以 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是反对称双线性函数.

$$(2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_2]{c_3-3c_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{c_3-2c_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{即可逆矩阵 } \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 使得 } \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ 由 } (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{P} \text{ 得 } \mathbf{R}^3 \text{ 的基}$$





$$\eta_1 = \varepsilon_1, \quad \eta_2 = \varepsilon_2, \quad \eta_3 = -2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

若设 $x = x'_1 \eta_1 + x'_2 \eta_2 + x'_3 \eta_3, y = y'_1 \eta_1 + y'_2 \eta_2 + y'_3 \eta_3$, 则 $f(x, y)$ 在该基下的表达式为

$$f(x, y) = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1$$

六、设 $f(\lambda)$ 是 $m_{A_1}(\lambda)$ 与 $m_{A_2}(\lambda)$ 的最小公倍式, 则 $f(A_1) = O, f(A_2) = O$, 于是

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & O \\ O & f(A_2) \end{pmatrix} = O$$

即 $f(\lambda)$ 是 A 的零化多项式, 故 $m_A(\lambda) | f(\lambda)$.

又由 $O = m_A(A) = \begin{pmatrix} m_{A_1}(A_1) & O \\ O & m_{A_2}(A_2) \end{pmatrix}$ 得 $m_{A_1}(A_1) = O, m_{A_2}(A_2) = O$, 即 $m_A(\lambda)$ 分别是 A_1 和 A_2 的零化多

项式, 从而 $m_{A_1}(\lambda) | m_A(\lambda), m_{A_2}(\lambda) | m_A(\lambda)$. 故 $f(\lambda) | m_A(\lambda)$. 由于 $f(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 均是首项系数为 1 的多项式, 从而 $f(\lambda) = m_A(\lambda)$.

七、(1) 设 2 是 B 的特征值, 则有 $x \neq 0$ 使 $Bx = 2x$, 于是 $ABx = Bx + 2Ax$, 即 $2Ax = 2x + 2Ax$, 解得 $x = 0$, 矛盾. 故 2 不是 B 的特征值.

(2) 由 $AB = B + 2A$ 得 $A(B - 2E) = B$, 由 (1) 知 $B - 2E$ 可逆, 于是 $A = B(B - 2E)^{-1}$. 根据题设知, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}BP = \Lambda$, 其中 Λ 为对角阵, 则

$$P^{-1}AP = P^{-1}BPP^{-1}(B - 2E)^{-1}P = \Lambda(P^{-1}BP - 2E)^{-1} = \Lambda(\Lambda - 2E)^{-1}$$

其中 $\Lambda(\Lambda - 2E)^{-1}$ 仍是对角阵. 故可逆矩阵 P 使 $P^{-1}BP, P^{-1}AP$ 都是对角矩阵.

八、根据 Jordan 定理, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$, 其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i \times r_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

且 $r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$. 于是

$$A^m = (PJP^{-1})^m = PJ^mP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1^m & & \\ & J_2^m & \\ & & \ddots \\ & & & J_s^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

从而

$$r(A^m) = r(J^m) = r(J_1^m) + r(J_2^m) + \dots + r(J_s^m)$$

当 $\lambda_i \neq 0$ 时, J_i 是可逆矩阵, 此时, $r(J_i^n) = r(J_i^{n+1}) = r_i$; 而当 $\lambda_i = 0$ 时, $J_i^n = O$, 由 $r_i \leq n$ 知 $J_i^n = J_i^{n+1} = O$. 故

$$r(A^n) = r(J^n) = r(J_1^n) + r(J_2^n) + \dots + r(J_s^n) = r(J_1^{n+1}) + r(J_2^{n+1}) + \dots + r(J_s^{n+1}) = r(J^{n+1}) = r(A^{n+1})$$





西北工业大学硕士研究生入学考试高等代数真题及解答

2007 年试题

一、(本题满分 15 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $AXA - \frac{1}{2}B^*A = XA$, 求矩阵 X .

二、(本题满分 10 分)

设 n 阶方阵 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ($2 < m < n$) 对应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. 证明: 向量组

$$\beta_1 = A(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \beta_2 = A(\alpha_1 + \alpha_3), \quad \dots, \quad \beta_{m-1} = A(\alpha_1 + \alpha_m), \quad \beta_m = A(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)$$

线性无关的充要条件是 $\lambda_i \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$).

三、(本题满分 20 分)

讨论线性方程组 $Ax = b$ 的可解性, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & c & -2 \\ 4 & 3 & 5 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

在有无穷多解时求通解(要求用向量形式表示).

四、(本题满分 10 分)

设 4 阶方阵 A 的各行元素之和为 1, 各列元素之和为 2, 且非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有 3 个线性无关的解向量, 证明 A 相似于对角矩阵.

五、(本题满分 20 分)

已知 4 元二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2$$

其中 $\bar{x} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

1) 写出二次型的矩阵 A ;

2) 求一正交变换 $x = Qy$ 化二次型 f 为标准形.

六、(本题满分 20 分)

设 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 是数域 K 上矩阵空间 $K^{2 \times 2}$ 中矩阵 A 在基

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

下的坐标, $(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ 是 A 在基 G_1, G_2, G_3, G_4 下的坐标, 且

$$y_1 = 3x_1 - 5x_2, \quad y_2 = -x_1 + 2x_2, \quad y_3 = 2x_3 + 3x_4, \quad y_4 = 5x_3 + 8x_4$$

1) 求由基 G_1, G_2, G_3, G_4 到基 F_1, F_2, F_3, F_4 的过渡矩阵;

2) 求基 G_1, G_2, G_3, G_4 ;

3) 求矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 在基 G_1, G_2, G_3, G_4 下的坐标.





七、(本题满分 15 分)

设多项式空间 $P[t]_3 = \{f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \mid a_i \in \mathbf{R}\}$ 中的线性变换为

$$T(f(t)) = (a_0 - a_2) + (a_1 - a_3)t + (a_2 - a_0)t^2 + (a_3 - a_1)t^3$$

求 $P[t]_3$ 的一个基, 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

八、(本题满分 10 分)

设 A 是 6 阶矩阵, A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda + 1)^3 (\lambda - 2)^2 (\lambda + 3)$$

A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 2) (\lambda + 3)$$

1) 求 A 的所有不变因子;

2) 写出 A 的 Jordan 标准形.

九、(本题满分 15 分)

设 A, C 分别为 m 阶和 n 阶实对称矩阵, 且 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ 为正定矩阵.

1) 计算 $P^T M P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^{-1} B^T & E_n \end{pmatrix}$;

2) 证明: $A - B C^{-1} B^T$ 为正定矩阵.

十、(本题满分 8 分)

设线性空间 V 的线性变换 T 和 S 满足 $TS = ST$, 又设 λ_0 是 T 的特征值. 证明: T 的特征子空间 $V_{\lambda_0} = \{\alpha \mid T(\alpha) = \lambda_0 \alpha, \alpha \in V\}$ 是 S 的不变子空间.

十一、(本题满分 7 分)

设 T 和 S 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, 且满足

$$[T(\alpha), \beta] = [\alpha, S(\beta)] \quad (\forall \alpha, \beta \in V)$$

1) 若 T 和 S 在 V 的标准正交基下的矩阵分别是 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 证明: $B = A^T$;

2) 证明: $R(S) \perp N(T)$, 其中 $R(S)$ 为 S 的值域, $N(T)$ 为 T 的核.

2007 年试题参考解答

一、由 $AXA - \frac{1}{2}B^*A = XA$ 得

$$(A - E)XA = \frac{1}{2}B^*A$$

可求得 $|A| = 56$, $|A - E| = 1$, $|B| = 4$, 所以矩阵 $A, A - E$ 和 B 可逆, 于是由上式得

$$X = \frac{1}{2}(A - E)^{-1}B^* = \frac{1}{2}(A - E)^{-1}|B|B^{-1} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$





二、因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 A 的互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 对应的特征向量, 所以它们线性无关, 且有

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= A(\alpha_i + \alpha_{i+1}) = \lambda_1 \alpha_i + \lambda_{i+1} \alpha_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, m-1) \\ \beta_m &= A(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m \end{aligned} \right\} \quad ①$$

设

$$k_1 \beta_1 + \dots + k_{m-1} \beta_{m-1} + k_m \beta_m = 0$$

将式①代入上式并整理得

$$(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_1 + k_m \lambda_1) \alpha_1 + (k_1 \lambda_2 + k_m \lambda_2) \alpha_2 + \dots + (k_{m-1} \lambda_m + k_m \lambda_m) \alpha_m = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 从而

$$\begin{cases} k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_1 + \dots + k_{m-1} \lambda_1 + k_m \lambda_1 = 0 \\ k_1 \lambda_2 + k_m \lambda_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ k_{m-1} \lambda_m + k_m \lambda_m = 0 \end{cases}$$

可见 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的充要条件是上面的齐次线性方程组只有零解. 于是其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \lambda_m & \lambda_m \end{vmatrix} = (-1)^n (n-2) \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \neq 0$$

故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的充要条件是 $\lambda_i \neq 0 (i=1, 2, \dots, m)$.

三、增广矩阵

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & c & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & c-3 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & a-4 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_1 + r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 - r_2 \\ r_2 \times (-1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & c-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right)$$

1. 当 $a \neq -1$ 且 $c \neq 4$ 时, $r(B) = r(A) = 4$, 方程组有唯一解;

2. 当 $a = -1$ 时, 若 $c \neq 4$ 则 $r(B) = r(A) = 3$, 若 $c = -4$ 则 $r(B) = r(A) = 2$, 方程组均有无穷多解;

3. 当 $c = 4$ 时, 若 $a \neq -1$ 则 $r(B) = r(A) = 3$, 若 $a = -1$ 则 $r(B) = r(A) = 2$, 方程组均有无穷多解.

当 $a = -1, c = 4$ 时, 通解为

$$x = (-2, 3, 0, 0)^T + k_1(-2, 1, 1, 0)^T + k_2(4, -5, 0, 1)^T \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

当 $a = -1, c \neq 4$ 或 $a \neq -1, c = 4$ 时, 通解为

$$x = (-2, 3, 0, 0)^T + k(4, -5, 0, 1)^T \quad (k \text{ 为任意常数})$$

四、因为 A 的各行元素之和为 1, 各列元素之和为 2, 所以

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而 1 和 2 是 A 的特征值 (A^T 与 A 有相同的特征值).

又知 $Ax = b$ 有 3 个线性无关的特征向量, 不妨设为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. 由于 $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$ 是 $Ax = 0$ 的解向量, 且由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关知 $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性无关, 于是 0 是 A 的特征值且对应 2 个线性无关的特征向量, 从而 0 至少应是 A 的 2 重特征值.





由于 4 阶矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 1, 2 和 0 (2 重特征值), 且对应 2 重特征值 0 有 2 个线性无关的特征向量, 故 \mathbf{A} 相似于对角矩阵.

五、1) 由于

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + (x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + (x_3^2 - 2x_3\bar{x} + \bar{x}^2) + (x_4^2 - 2x_4\bar{x} + \bar{x}^2) = \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\bar{x} + 4\bar{x}^2 = \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = \\ &= \frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \end{aligned}$$

所以二次型的矩阵为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) 可求得 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = -\lambda(1-\lambda)^3$, 所以 \mathbf{A} 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 0$$

对应的特征向量分别为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交单位化得

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

故正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 化二次型为

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 0y_4^2$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

六、1) 由题设知坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$





从而基变换公式为

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) = (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4) \mathbf{P}$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

即是由基 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ 到基 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ 的过渡矩阵.

2) 由于 $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4) = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) \mathbf{P}^{-1}$, 其中

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= 2\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{G}_2 &= 5\mathbf{F}_1 + 3\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_3 &= 8\mathbf{F}_3 - 5\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{G}_4 &= -3\mathbf{F}_3 + 2\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) 可求得

$$\mathbf{B} = -\mathbf{G}_1 + 2\mathbf{G}_2 - 3\mathbf{G}_3 + 4\mathbf{G}_4$$

故 \mathbf{B} 在基 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ 下的坐标为 $(-1, 2, -3, 4)^T$.

七、取 $P[t]_3$ 的基 $1, t, t^2, t^3$, 则

$$T(1) = 1 - t^2, \quad T(t) = t - t^3, \quad T(t^2) = -1 + t^2, \quad T(t^3) = -t + t^3$$

于是 T 在该基下的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可求得 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \lambda^2(\lambda - 2)^2$, 所以 \mathbf{A} 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

对应的特征向量为

$$\mathbf{p}_1 = (-1, 0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{p}_2 = (0, -1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{p}_3 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{p}_4 = (0, 1, 0, 1)^T$$

$$\text{令 } \mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

由 $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (1, t, t^2, t^3) \mathbf{P}$ 得 $P[t]_3$ 的基

$$f_1 = -1 + t^2, \quad f_2 = -t + t^3, \quad f_3 = 1 + t^2, \quad f_4 = t + t^3$$

T 在该基下的矩阵为 $\text{diag}(2, 2, 0, 0)$.

八、1) 由 \mathbf{A} 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 的表达式知 \mathbf{A} 的初等因子为

$$(\lambda + 1)^2, \lambda + 1, \lambda - 2, \lambda - 2, \lambda + 3$$

于是 \mathbf{A} 的不变因子为

$$d_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

$$d_5(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

$$d_4(\lambda) = d_3(\lambda) = d_2(\lambda) = d_1(\lambda) = 1$$





2) 由 A 的初等因子得 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \\ & & & & & -3 \end{pmatrix}$$

$$9.1) P^T M P = \begin{pmatrix} E_m & -BC^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^{-1}B^T & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BC^{-1}B^T & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

2) 因为 $(A - BC^{-1}B^T)^T = A^T - B(C^{-1})^T B^T = A - BC^{-1}B^T$, 所以 $A - BC^{-1}B^T$ 是对称矩阵. 又对任意 m 维非零列向量 x , 有

$$x^T (A - BC^{-1}B^T) x = (x^T, 0^T) \begin{pmatrix} A - BC^{-1}B^T & O \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = (x^T, 0^T) P^T M P \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = y^T M y$$

其中 $y = P \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -C^{-1}B^T x \end{pmatrix} \neq 0$.

由 M 正定知 $y^T M y > 0$, 故 $x^T (A - BC^{-1}B^T) x > 0$, 即 $A - BC^{-1}B^T$ 为正定矩阵.

十、对 $\forall \alpha \in V_{\lambda_0}$, 有 $T(\alpha) = \lambda_0 \alpha$, 于是

$$T(S(\alpha)) = (TS)(\alpha) = (ST)(\alpha) = S(T(\alpha)) = S(\lambda_0 \alpha) = \lambda_0 S(\alpha)$$

可见 $S(\alpha) \in V_{\lambda_0}$, 故 V_{λ_0} 是 S 的不变子空间.

十一、1) 根据题设

$$T(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) A, \quad S(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) B$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基, 则有

$$T(\gamma_i) = a_{1i}\gamma_1 + a_{2i}\gamma_2 + \dots + a_{ni}\gamma_n, \quad S(\gamma_j) = b_{1j}\gamma_1 + b_{2j}\gamma_2 + \dots + b_{nj}\gamma_n$$

于是

$$[T(\gamma_i), \gamma_j] = [a_{1i}\gamma_1 + a_{2i}\gamma_2 + \dots + a_{ni}\gamma_n, \gamma_j] = a_{ji}$$

$$[\gamma_i, S(\gamma_j)] = [\gamma_i, b_{1j}\gamma_1 + b_{2j}\gamma_2 + \dots + b_{nj}\gamma_n] = b_{ij}$$

故

$$a_{ji} = [T(\gamma_i), \gamma_j] = [\gamma_i, S(\gamma_j)] = b_{ij}$$

这表明 $B = A^T$.

2) 对 $\forall \alpha \in R(S), \forall \beta \in N(T)$, 存在 $\gamma \in V$ 使得 $S(\gamma) = \alpha$, 而 $T(\beta) = \theta$, 于是

$$[\alpha, \beta] = [S(\gamma), \beta] = [\gamma, T(\beta)] = [\gamma, \theta] = 0$$

这表明 $\alpha \perp \beta$, 故 $R(S) \perp N(T)$.

2008 年试题

一、(本题满分 10 分)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ -x & a & x & \cdots & x & x \\ -x & -x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -x & -x & -x & \cdots & a & x \\ -x & -x & -x & \cdots & -x & a \end{vmatrix} \quad (n \geq 2)$$





二、(本题满分 10 分)

已知 n 阶方阵 A, B, C 满足 $B=BA+A, C=AC+E$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵. 试求 $B-C$.

三、(本题满分 10 分)

设 A 为 n 阶方阵, y 为 n 维非零列向量, 证明:

1) 若向量组 $y, Ay, A^2y, \dots, A^{n-1}y$ 的秩为 $r (1 \leq r \leq n)$, 则向量组 $y, Ay, A^2y, \dots, A^{r-1}y$ 线性无关;

2) A^ny 可由 $y, Ay, A^2y, \dots, A^{n-1}y$ 线性表示.

四、(本题满分 20 分)

已知两个线性方程组

$$(I): \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad (II): \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 + bx_2 + x_4 = 6 \\ x_3 - 2x_4 = 2c + 1 \end{cases}$$

1) 求方程组 (I) 的通解;

2) 确定方程组 (II) 中的参数 b, c , 使方程组 (II) 与方程组 (I) 同解.

五、(本题满分 15 分)

求正交于实向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ 的全体实向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

六、(本题满分 15 分)

设 4 阶方阵 A 的一个特征值为 3, A^T 的一个特征值为 4, 又设 η_0, η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的线性无关的解向量.

1) 证明 A 可对角化;

2) 求 $Ax=b$ 的通解.

七、(本题满分 20 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -bx_1^2 - 2x_2^2 - bx_3^2 + 2(b-2)x_1x_3$ 经过正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $f = -2y_1^2 - 2y_3^2$.

1) 求参数 b 的值及所用的正交变换;

2) 问 $f(x_1, x_2, x_3) = -1$ 表示哪一类二次曲面?

八、(本题满分 15 分)

已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 & -14 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) 求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式;

2) 写出 A 的 Jordan 标准形.

九、(本题满分 20 分)

已知 \mathbb{R}^3 的线性变换 T 在基

$$\alpha_1 = (-1, 0, 1), \quad \alpha_2 = (0, 1, 1), \quad \alpha_3 = (1, -1, -1)$$

下的象为

$$T(\alpha_1) = \beta_1 = (1, 0, 0), \quad T(\alpha_2) = \beta_2 = (0, -1, 0), \quad T(\alpha_3) = \beta_3 = (-1, 1, 2)$$

1) 求 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵;

2) 若 $\alpha = (1, 1, 1)$, 求 $T(\alpha)$;

3) 若 $T(\beta)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(-1, 2, 1)^T$, 求 β ;





4) 求 T 在 \mathbf{R}^3 的基 $\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 下的矩阵.

十、(本题满分 8 分)

设 V 是数域 K 上的一个 3 维线性空间, V 的一个基为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, V 的两个子空间为

$$W_1 = \{k_0(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \mid k_0 \in K\}$$

$$W_2 = \{(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) \mid k_i \in K \text{ 且 } k_1 + k_2 + k_3 = 0\}$$

证明 $V = W_1 \oplus W_2$, 即 V 可表示为 W_1 与 W_2 的直和.

十一、(本题满分 7 分)

设 A 是 n 阶方阵, 证明存在 n 阶可逆矩阵 B 和满足 $C^2 = C$ 的 n 阶幂等矩阵 C , 使 $A = BC$.

2008 年试题参考解答

一、

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x & 0+x \\ -x & a & \cdots & x & 0+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -x & -x & \cdots & a & 0+x \\ -x & -x & \cdots & -x & (a-x)+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x & 0 \\ -x & a & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -x & -x & \cdots & a & 0 \\ -x & -x & \cdots & -x & a-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x & x \\ -x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -x & -x & \cdots & a & x \\ -x & -x & \cdots & -x & x \end{vmatrix}$$

$$(a-x)D_{n-1} + \begin{vmatrix} a+x & 2x & \cdots & 2x & 0 \\ 0 & a+x & \cdots & 2x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+x & 0 \\ -x & -x & \cdots & -x & x \end{vmatrix} = (a-x)D_{n-1} + x(a+x)^{n-1}$$

对 D_n^T 按上述方法推导得 $D_n^T = (a+x)D_{n-1}^T - x(a-x)^{n-1}$. 由于 $D_n = D_n^T$, 所以

$$D_n = (a+x)D_{n-1} - x(a-x)^{n-1}$$

当 $x \neq 0$ 时, 联立求解 $\begin{cases} D_n = (a-x)D_{n-1} + x(a+x)^{n-1} \\ D_n = (a+x)D_{n-1} - x(a-x)^{n-1} \end{cases}$ 得

$$D_n = \frac{(a+x)^n + (a-x)^n}{2}$$

当 $x=0$ 时, $D_n = a^n$. 故总有

$$D_n = \frac{(a+x)^n + (a-x)^n}{2}$$

二、由 $C = AC + E$ 得 $(E-A)C = E$, 所以 $E-A$ 可逆, 且 $C = (E-A)^{-1}$. 又由 $B = BA + A$ 得 $B(E-A) = A$, 所以 $B = A(E-A)^{-1}$. 故

$$B-C = A(E-A)^{-1} - (E-A)^{-1} = (A-E)(E-A)^{-1} = -E$$

三、1) 反证. 假设 $y, Ay, \cdots, A^{r-1}y$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $k_0, k_1, \cdots, k_{r-1}$, 使得

$$k_0 y + k_1 Ay + \cdots + k_{r-1} A^{r-1} y = 0$$

不妨设 $k_{r-1} = \cdots = k_{r-p} = 0, k_{r-p-1} \neq 0$, 其中 $r-1 \geq p \geq 0$, 则

$$A^{r-p-1} y = -\frac{k_0}{k_{r-p-1}} y - \frac{k_1}{k_{r-p-1}} Ay - \cdots - \frac{k_{r-p-2}}{k_{r-p-1}} A^{r-p-2} y$$





由上式进而推得 $A^{r-p-1}y, A^{r-p}y, \dots, A^{n-1}y$ 均可由 $y, Ay, \dots, A^{r-p-2}y$ 线性表示, 这与 $y, Ay, \dots, A^{n-1}y$ 的秩为 r 矛盾. 故 $y, Ay, \dots, A^{r-1}y$ 线性无关.

2) 由 1) 知 $y, Ay, \dots, A^{r-1}y$ 线性无关, 又知 $y, Ay, \dots, A^{r-1}y, A^r y$ 线性相关, 所以 $A^r y$ 可由 $y, Ay, \dots, A^{r-1}y$ 线性表示. 进而推得 $A^n y$ 可由 $y, Ay, \dots, A^{r-1}y$ 线性表示, 故 $A^n y$ 可由 $y, Ay, \dots, A^{n-1}y$ 线性表示.

四、1) 对方程组 (I) 的增广矩阵进行初等行变换得

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2 + x_4 \\ x_2 = -4 + x_4 \\ x_3 = -5 + 2x_4 \end{cases}$, 通解为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + t \\ x_2 = -4 + t \\ x_3 = -5 + 2t \\ x_4 = t \end{cases} \quad (t \text{ 为任意常数})$$

即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ 为任意常数})$

2) 将 $x_1 = -2, x_2 = -4, x_3 = -5, x_4 = 0$ 代入方程组 (II) 解得

$$b = -2, \quad c = -3$$

此时对方程组 (II) 的增广矩阵做初等行变换得

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

可见 (I) 与 (II) 同解.

五、由 $[a_i, x] = a_i^T x = 0 \quad (i=1, 2, 3)$ 得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 = 0 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

对该方程组的系数矩阵做初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a & 1-2a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 2(a^2-1) \end{pmatrix}$$

当 $a^2 = 1$ 时, $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a & 1-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -ax_3 + (2a-1)x_4 \end{cases}$, 通解为

$$\begin{cases} x_1 = -2k_2 \\ x_2 = -ak_1 + (2a-1)k_2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$





故
$$\mathbf{x} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2a-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

当 $a^2 \neq 1$ 时, $\mathbf{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a & 1-2a \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

故
$$\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数})$$

六、1) 记 $\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_0, \mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_0$, 则

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_1 = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} = 0\mathbf{p}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{p}_2 = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_2 - \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} = 0\mathbf{p}_2$$

可见 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 是 \mathbf{A} 对应于特征值 0 的特征向量, 由 $\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关可得 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 线性无关, 此时 0 至少是 \mathbf{A} 的 2 重特征值. 由题设 3 是 \mathbf{A} 的一个特征值, 而 \mathbf{A}^T 与 \mathbf{A} 有相同的特征值. 故 4 也是 \mathbf{A} 的一个特征值, 从而 0, 3, 4 是 4 阶方阵 \mathbf{A} 的全部特征值. 由于对应 2 重特征值 0 有两个线性无关的特征向量, 故 \mathbf{A} 可对角化.

2) 由 1) 知, 存在可逆矩阵 \mathbf{P} , 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(0, 0, 3, 4)$, 所以 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$. 于是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系含 $4 - \text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ 个线性无关的解向量. 由 1) 知 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, 故 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}_0 + k_1(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_0) + k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_0) \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

七、1) 由题意知, 二次型的矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -b & 0 & b-2 \\ 0 & -2 & 0 \\ b-2 & 0 & -b \end{pmatrix}$ 正交相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 于是

$-2, 0, -2$ 是 \mathbf{A} 的特征值, 利用

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = -b - 2 - b = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 + 0 + (-2)$$

解得 $b = 1$.

可解得矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 对应特征值 -2 的线性无关特征向量为

$$\mathbf{p}_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{p}_2 = (0, 1, 0)^T$$

它们已正交, 单位化得

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|} \mathbf{p}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_2\|} \mathbf{p}_2 = (0, 1, 0)^T$$

又 \mathbf{A} 对应特征值 0 的特征向量为 $\mathbf{p}_3 = (-1, 0, 1)^T$, 单位化得 $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_3\|} \mathbf{p}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$, 故所用的正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$





2) $f = -2y_1^2 - 2y_3^2 = -1$ 表示圆柱面.

八、法 1 可求得

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 & -6 & 14 \\ -1 & \lambda+1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4$$

由于 $A - E \neq O$, $(A - E)^2 = O$, 故 A 的最小多项式为

$$m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$$

又可求得 $\text{rank}(A - E) = 2$, 于是 A 的 Jordan 标准形中含两个以 1 为对角元的 Jordan 块, 且其最高阶数为 2, 故 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A 的初等因子为

$$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$$

A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1, \quad d_3(\lambda) = d_4(\lambda) = (\lambda-1)^2$$

法 2 对 $\lambda E - A$ 用初等变换化为 Smith 标准形得

$$\begin{aligned} \lambda E - A &= \begin{pmatrix} \lambda-3 & 4 & -6 & 14 \\ -1 & \lambda+1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + (\lambda-3)r_2 \\ r_3 + (\lambda-2)r_4}} \begin{pmatrix} 0 & (\lambda-1)^2 & -\lambda-3 & 5\lambda-1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2 + (\lambda+1)c_1 \\ c_3 - c_1 \\ c_4 + 5c_1 \\ c_1 \times (-1)}} \\ &\begin{pmatrix} 0 & (\lambda-1)^2 & -\lambda-3 & 5\lambda-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_4 + \lambda c_3 \\ r_1 - (\lambda+3)r_4 \\ r_4 \times (-1)}} \\ &\begin{pmatrix} 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & -(\lambda-1)^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1, \quad d_3(\lambda) = d_4(\lambda) = (\lambda-1)^2$$

A 的初等因子为

$$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$$

A 的 Jordan 标准形同前. A 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$.

九、1) 取 \mathbf{R}^3 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$, 则有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)A, \quad (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)B$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

于是 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A^{-1}B$, 从而

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)A^{-1}B$$





故 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) 因为 $\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以

$$T(\alpha) = T \left[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\beta_2 + \beta_3 = (-1, -1, 2)$$

3) 由于 $T(\beta) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以

$$\beta = T^{-1} \left[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = T^{-1} \left[(\beta_1, \beta_2, \beta_3)C^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = T^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)C^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\alpha_1 - \alpha_2 = (-2, -1, 1)$$

4) 因为 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = T[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P] = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)CP =$$

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)P^{-1}CP$$

故 T 在基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 下的矩阵为

$$D = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

十、因为 W_1 与 W_2 是 V 的子空间, 所以 $W_1 + W_2 \subset V$. 又对任意 $\alpha \in V$, 有

$$\alpha = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 = k_0(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta_1 + \beta_2$$

其中

$$\beta_1 = k_0(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad \beta_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

而

$$k_0 = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}, \quad k_1 = l_1 - k_0, \quad k_2 = l_2 - k_0, \quad k_3 = l_3 - k_0$$

由于 $k_1 + k_2 + k_3 = (l_1 - k_0) + (l_2 - k_0) + (l_3 - k_0) = (l_1 + l_2 + l_3) - 3k_0 = 0$, 所以 $\beta_1 \in W_1, \beta_2 \in W_2$. 故 $V \subset W_1 + W_2$, 从而 $V = W_1 + W_2$.

对任意 $\beta \in W_1 \cap W_2$, 有

$$\beta = k_0(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

所以

$$(k_0 - k_1)\alpha_1 + (k_0 - k_2)\alpha_2 + (k_0 - k_3)\alpha_3 = 0$$





由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关得 $k_0 - k_1 = k_0 - k_2 = k_0 - k_3 = 0$, 即 $k_0 = k_1 = k_2 = k_3$, 代入 $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ 得 $k_0 = 0$, 故 $\beta = 0$. 这表明 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 即 $W_1 + W_2$ 是直和. 于是 $V = W_1 \oplus W_2$.

十一、设 $\text{rank} A = r$. 则存在 n 阶可逆矩阵 P 和 Q , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

于是

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} = (P^{-1} Q^{-1}) \left(Q \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} \right) = BC$$

其中 $B = P^{-1} Q^{-1}$ 是 n 阶可逆矩阵, 而 $C = Q \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}$ 满足

$$C^2 = \left[Q \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} \right] \left[Q \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} \right] = Q \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} = C$$

2009 年试题

一、(本题满分 10 分)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ n-1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 3 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & n \end{vmatrix}$$

二、(本题满分 15 分)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E_m 是 m 阶单位矩阵. 证明:

$$|E_m + AB| = |E_n + BA|$$

三、(本题满分 15 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, -3$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 - 3\alpha_3$.

1. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;
2. 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

四、(本题满分 15 分)

设向量空间 \mathbf{R}^2 按照某种内积(不一定是通常的)构成欧氏空间, 它的两组基为

$$\alpha_1 = (1, 1), \quad \alpha_2 = (1, -1) \text{ 和 } \beta_1 = (0, 2), \quad \beta_2 = (6, 12)$$

且 α_i 与 β_j 的内积为

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1, \quad [\alpha_1, \beta_2] = 15, \quad [\alpha_2, \beta_1] = -1, \quad [\alpha_2, \beta_2] = 3$$

求基 β_1, β_2 的度量矩阵.

五、(本题满分 20 分)

讨论线性方程组 $Ax = b$ 的可解性, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & c & 5 \\ 1 & -3 & -2 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

在有无穷多解时求通解(要求用向量形式表示).





六、(本题满分 10 分)

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 且 a_{11} 的代数余子式 $A_{11} \neq 0$. 证明: 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充要条件是 $A^*b = 0$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

七、(本题满分 20 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

1. 求 A 的特征值与特征向量;
2. 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$;
3. 求 A 及 $\left(A - \frac{3}{2}E\right)^6$.

八、(本题满分 15 分)

$$\text{已知 } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ b & -1 & c \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. 写出 A 的所有可能的 Jordan 标准形(不考虑 Jordan 块的排列次序);
2. 导出 A 相似于对角矩阵的充要条件; 在 A 相似于对角矩阵时, 求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

九、(本题满分 20 分)

设 3 维欧氏空间 V 中元素 α_0 在 V 的标准正交基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的坐标为 $(1, -1, 0)^T$. 定义 V 的变换如下

$$T(\alpha) = \alpha + [\alpha, \alpha_0]\alpha_0 \quad (\forall \alpha \in V)$$

其中 $[\alpha, \alpha_0]$ 表示 α 与 α_0 的内积.

1. 证明 T 是线性变换;
2. 证明 T 是对称变换;
3. 求 V 的一个标准正交基 η_1, η_2, η_3 , 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

十、(本题满分 10 分)

设线性空间 V 的线性变换 T 和 S 满足 $TS = ST$. 证明: S 的值域 $R(S)$ 与核 $N(S)$ 都是 T 的不变子空间.

2009 年试题参考解答

一、

$$D_n \xrightarrow{\text{按第 1 行展开}} n! + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} n-1 & 2 & & \\ & n-2 & 3 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 2 & n-1 \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第 1 列展开}}$$

$$n! + (-1)^{1+n} [(n-1)! + (-1)^{n-1+1}(n-1)!] =$$

$$n! + [(-1)^{n+1} - 1](n-1)!$$

二、构造 $n+m$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix}$. 因为

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m + AB & A \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

对上面两式两边分别取行列式得

$$\begin{vmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{vmatrix} = |E_n + BA|, \quad \begin{vmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{vmatrix} = |E_m + AB|$$

从而 $|E_m + AB| = |E_n + BA|$.





三、1. 设一组数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0 \quad (1)$$

上式左乘矩阵 A , 并利用 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = -3\alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 - 3\alpha_3$, 得

$$-k_1 \alpha_1 - 3k_2 \alpha_2 + k_3 (\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0 \quad (2)$$

式① $\times 3$ +式②, 得

$$2k_1 \alpha_1 + k_3 \alpha_2 = 0 \quad (3)$$

上式再左乘 A , 得

$$-2k_1 \alpha_1 - 3k_3 \alpha_2 = 0 \quad (4)$$

式③+式④, 得 $-2k_3 \alpha_2 = 0$, 由于 $\alpha_2 \neq 0$, 所以 $k_3 = 0$. 代入式③得 $k_1 = 0$. 再代入式①得 $k_2 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

2. 因为

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, -3\alpha_2, \alpha_2 - 3\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

由 1 知 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 从而由上式得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

四、可求得 $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \beta_2 = 9\alpha_1 - 3\alpha_2 \end{cases}$, 所以

$$[\beta_1, \beta_1] = [\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1] = [\alpha_1, \beta_1] - [\alpha_2, \beta_1] = 2$$

$$[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2] = [\alpha_1, \beta_2] - [\alpha_2, \beta_2] = 12$$

$$[\beta_2, \beta_2] = [9\alpha_1 - 3\alpha_2, \beta_2] = 9[\alpha_1, \beta_2] - 3[\alpha_2, \beta_2] = 126$$

故基 β_1, β_2 的度量矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 12 & 126 \end{pmatrix}$$

五、可求得 $|A| = (4-c)(a+1)$.

1. 当 $a \neq -1$ 且 $c \neq 4$ 时, 方程组有唯一解.

2. 当 $a = -1$ 时, 增广矩阵

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & c & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

如果 $c \neq 4$, 则 $r(B) = r(A) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解, 通解为

$$x = (-1, 1, 0, 0)^T + k(-2, -1, 0, 1)^T \quad (k \text{ 任意})$$

如果 $c = 4$, 则 $r(B) = r(A) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解, 通解为

$$x = (-1, 1, 0, 0)^T + k_1(-1, -1, 1, 0)^T + k_2(-2, -1, 0, 1)^T \quad (k_1, k_2 \text{ 任意}) \quad (*)$$

3. 当 $c = 4$ 时, 增广矩阵

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & a & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

如果 $a \neq -1$, 则 $r(B) = r(A) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解, 通解为





$$x = (-1, 1, 0, 0)^T + k(-1, -1, 1, 0)^T \quad (k \text{ 任意})$$

如果 $a = -1$, 则 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解, 通解如同式(*).

六、必要性. 因为 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 有无穷多解, 所以 $r(\mathbf{A}) < n$, 从而 $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{O}$. 设 x_0 是 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 的解, 则有

$$\mathbf{A}^* \mathbf{b} = \mathbf{A}^* (\mathbf{A}x_0) = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})x_0 = \mathbf{O}$$

充分性. 因为 $A_{11} \neq 0$, 所以 $r(\mathbf{A}) \geq n-1$, 从而 $r(\mathbf{A}^*) \geq 1$. 由 $\mathbf{A}^* \mathbf{b} = \mathbf{O}$ 且 $\mathbf{b} \neq \mathbf{O}$ 知, $|\mathbf{A}^*| = 0$, 于是 $|\mathbf{A}| = 0$. 故 $r(\mathbf{A}) = n-1$, $r(\mathbf{A}^*) = 1$ 且 $\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{O}$. 又有 $\mathbf{A}^* (\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathbf{O}$, 所以 $r(\mathbf{A}^*) + r(\mathbf{A}; \mathbf{b}) \leq n$, 即 $r(\mathbf{A}; \mathbf{b}) \leq n-1$. 但 $r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq r(\mathbf{A}) = n-1$, 这表明 $r(\mathbf{A}; \mathbf{b}) = r(\mathbf{A}) = n-1$, 故 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 有无穷多解.

七、1. 由于

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\alpha_1 = \mathbf{O} = 0\alpha_1, \quad \mathbf{A}\alpha_2 = \mathbf{O} = 0\alpha_2$$

且 α_1, α_2 线性无关, 所以 \mathbf{A} 的特征值为 $3, 0, 0$, 且属于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3 \alpha_3 \quad (k_3 \text{ 任意})$$

其中 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$, 而属于特征值 0 的全部特征向量为

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 不全为零})$$

2. 将 α_1, α_2 正交化得

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T$$

再将 β_1, β_2 和 α_3 单位化得正交矩阵 \mathbf{Q} 和对角矩阵 \mathbf{A} , 使得 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{A}$, 其中

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. 可求得

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\mathbf{A} - \frac{3}{2} \mathbf{E}\right)^6 = \mathbf{Q} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \mathbf{E} \right)^6 \mathbf{Q}^T = \left(\frac{3}{2}\right)^6 \mathbf{E}$$

八、1. 可求得 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = -(2-\lambda)^2(\lambda+1)$, 所以 \mathbf{A} 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1$$

故 \mathbf{A} 的所有可能的 Jordan 标准形为

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -3 & c \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} \text{ 可相似于对角矩阵时 } r(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1, \text{ 此时 } a = 0. \text{ 求解 } (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})x = \mathbf{O} \text{ 得基础}$$

解系

$$p_1 = (3, b, 0)^T, \quad p_2 = (0, c, 3)^T$$

求解 $(\mathbf{A} + \mathbf{E})x = \mathbf{O}$ 得基础解系 $p_3 = (0, 1, 0)^T$. 故

$$\mathbf{P} = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ b & c & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$





使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

九、1. 因为 $\forall \alpha, \beta \in V$ 和 $k, l \in \mathbf{R}$, 有

$$T(k\alpha + l\beta) = k\alpha + l\beta + [k\alpha + l\beta, \alpha_0]\alpha_0 = k\alpha + k[\alpha, \alpha_0]\alpha_0 + l\beta + l[\beta, \alpha_0]\alpha_0 = kT(\alpha) + lT(\beta)$$

所以 T 是线性变换.

2. 因为 $\forall \alpha, \beta \in V$, 有

$$[T(\alpha), \beta] = [\alpha + [\alpha, \alpha_0]\alpha_0, \beta] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \alpha_0][\alpha_0, \beta] = [\alpha, \beta + [\beta, \alpha_0]\alpha_0] = [\alpha, T(\beta)]$$

所以 T 是对称变换.

3. 因为

$$T(\xi_1) = 2\xi_1 - \xi_2, \quad T(\xi_2) = 2\xi_2 - \xi_1, \quad T(\xi_3) = \xi_3$$

从而 $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可求得正交矩阵 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 由

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)Q$$

求得 V 的标准正交基

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2, \quad \eta_2 = \xi_3, \quad \eta_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2$$

T 在该基下的矩阵为 $\text{diag}(1, 1, 3)$.

十、 $\forall \alpha \in R(S)$ 有 $\alpha = S(\beta)$, 其中 $\beta \in V$, 从而

$$T(\alpha) = T(S(\beta)) = TS(\beta) = ST(\beta) = S(T(\beta)) \in R(S)$$

所以 $R(S)$ 是 T 的不变子空间.

又 $\forall \alpha \in N(S)$ 有 $S(\alpha) = \theta$, 则

$$S(T(\alpha)) = ST(\alpha) = TS(\alpha) = T(S(\alpha)) = T(\theta) = \theta$$

即 $T(\alpha) \in N(S)$, 故 $N(S)$ 是 T 的不变子空间.





西北工业大学硕士研究生入学考试高等代数试题及解答

2015 年试题

一、是非题(用 T 与 F 分别表示是与非,每题 3 分本题,满分 15 分)

1. 如果矩阵 A, B 均为 n 阶方阵,则 $AB - BA = E$. ()
2. 如果 A, B 分别是 $m \times n, n \times p$ 的列满秩矩阵,则 $\text{rank } AB = \text{rank } B$. ()
3. 如果矩阵 A 与 B 等价,则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解. ()
4. 在实线性空间 \mathbf{R}^n 中,定义实值函数 $(x, y) = x^T Ay$,其中 A 是 n 阶实对称正定矩阵, x, y 皆为 n 维列向量,则函数 (x, y) 是一内积. ()
5. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,则方阵 A 与 B 合同. ()

二、填空题(每空 3 分,本题满分 15 分)

1. 已知三阶方阵 $A = (A_1, A_2, A_3)$,且 A 的行列式 $\det A = 2$,方阵 $B = (A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1)$,则 B 的行列式 $\det B = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 A 是 n 阶方阵,如果 $\text{rank } A = n - 2$,则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩 $\text{rank } A^* = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知线性空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的子空间

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 - x_3 = 0, x_i \in \mathbf{R}(i = 1, 2, 3, 4) \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 + x_3 = 0, x_i \in \mathbf{R}(i = 1, 2, 3, 4) \right\},$$

则 V_1 与 V_2 的和 $V_1 + V_2$ 的维数 $\dim(V_1 + V_2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知三阶方阵 $A = \alpha \beta^T$,其中 $\alpha = (1, -1, 2)^T, \beta = (1, 3, 1)^T$,则 A 的 Jordan 标准形为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 α_1, α_2 为二维线性空间 V 的一个基, T 是 V 上的线性变换,且 $T(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, T(\alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$,则 T 的特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、(本题满分 20 分)

设 $n(n > 1)$ 元线性方程组

$$\begin{cases} (a+1)x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = a+1 \\ x_1 + (a+2)x_2 + \cdots + nx_n = a+1 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + (a+n)x_n = a+1 \end{cases}$$

1. 问 a 为何值时,该线性方程组有唯一解、无解和无穷多解?
2. 在无穷多解时求通解。

四、(本题满分 10 分)

若非空集合 V 是复数域 \mathbf{C} 上的 n 维线性空间,证明 V 也是实数域 \mathbf{R} 上的线性空间,且在 \mathbf{R} 上, V 的维数是 $2n$ 。

五、(本题满分 10 分)

设欧氏空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的子空间 V 为

$$V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0, \end{cases} x_{ij} \in \mathbf{R}(i = 1, 2; j = 1, 2, 3) \right\}$$

其中 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 上的内积为 $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ij}, A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$.





1. 求 V 的一个基;
2. 求 V 的正交补 V^\perp 的一个基.

六、(本题满分 20 分)

设 T 是三维线性空间 V 上的线性变换, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一个基, 且

$$T(\alpha_1) = t\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad T(\alpha_2) = \alpha_1 + t\alpha_2 + \alpha_3, \quad T(\alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + t\alpha_3$$

1. 问 t 满足什么, T 是可逆变换, 且当 $t = 0$ 时, 求 T 的逆变换 T^{-1} ;
2. 问 t 为何值时, V 上存在非零元素 α , 使得 $T(\alpha) = \alpha$; 且求全部非零元素 α .

七、(本题满分 20 分)

已知三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + tx_2)^2 + (x_2 + tx_3)^2 + (x_3 + tx_1)^2$.

1. 问 t 为何值时, 二次型 f 的秩为 2?
2. 问 t 满足什么, 二次型 f 是正定二次型?
3. 在 $t = -1$ 时, 求正交变换 $x = Qy$, 将二次型 f 化为标准形.

八、(本题满分 10 分)

设 T 是欧氏空间 V 上的线性变换, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, 且 T 在该基下的矩阵为 A , 基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵为 G . 证明: T 是正交变换的充分必要条件是 $A^T G A = G$.

九、(本题满分 20 分)

已知欧氏空间 $\mathbf{R}[x]_2$ 的内积为

$$(f(x), g(x)) = \sum_{j=0}^2 a_j b_j, \quad \text{其中 } f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

T 是 $\mathbf{R}[x]_2$ 上的线性变换

$$T(f(x)) = (x^2, x, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}[x]_2$ 的子空间

$$V = \{a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid \sum_{i=0}^2 a_i = 0, a_i \in \mathbf{R} (i = 0, 1, 2)\},$$

1. 证明: V 是 T 的不变子空间;
2. 证明: T 是 V 上的对称变换, 且求 V 中的一个标准正交基, 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

十、(本题满分 10 分)

设 n 阶实对称三对角方阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_n & \end{pmatrix}$$

如果 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \neq 0$, 证明: A 的 n 个特征值互异.

2015 年试题参考解答

一、1. F; 2. T; 3. F; 4. T; 5. F.

二、1. 4; 2. 0; 3. 4; 4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 5. $\pm\sqrt{2}$.





三、解 1. 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & a+n \end{pmatrix}$, 可求得 $\det A = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) a^{n-1}$. (4 分)

(1) 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, 方程组有唯一解; (3 分)

(2) 当 $a = 0$ 时, 增广矩阵

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & \cdots & n & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1)$$

$\text{rank} A = \text{rank} \hat{A} = 1 < n$, 方程组有无穷多解; (3 分)

(3) 当 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, 增广矩阵

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a+1 & 2 & \cdots & n & 1 \\ 1 & a+2 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & a+n & 1 \end{array} \right)$$

因为 \hat{A} 的后 n 列的 n 阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & \cdots & n & 1 \\ a+2 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & \cdots & a+n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \cdots & n & 1 \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a^{n-1} \neq 0$$

所以 $\text{rank} \hat{A} = n > \text{rank} A$, 故方程组无解. (5 分)

2. 当 $a = 0$ 时, 方程组的特解 $\eta^* = (1, 0, \cdots, 0)^T$ (2 分), $Ax = 0$ 基础解系为

$$\xi_1 = (-2, 1, 0, \cdots, 0)^T, \quad \xi_2 = (-3, 0, 1, \cdots, 0)^T, \quad \cdots, \quad \xi_{n-1} = (-n, 0, \cdots, 0, 1)^T \quad (2 \text{ 分})$$

故通解为 $x = \eta^* + k_1 \xi_1 + \cdots + k_{n-1} \xi_{n-1}$ ($k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 任意) (1 分).

四、证 因为 V 是 C 上的线性空间, 所以 V 上的加法和数乘满足线性运算要求, 且对加法和数乘封闭. 故对 $\forall k \in R \subset C$, 及 $\forall \alpha \in V$, 有 $k\alpha \in V$, 故 V 是 R 上的线性空间. (3 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 C 上的 V 的一个基, 对于 $\forall \alpha \in V$, 存在 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in C$, 使得

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n \quad (1)$$

设 $k_i = k_{i1} + ik_{i2}$, 其中 $k_{i1}, k_{i2} \in R$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 式 (1) 整理为

$$\alpha = k_{11} \alpha_1 + k_{21} \alpha_2 + \cdots + k_{n1} \alpha_n + k_{12} i \alpha_1 + k_{22} i \alpha_2 + \cdots + k_{n2} i \alpha_n \quad (3 \text{ 分})$$

若有一组实数 k_1, k_2, \cdots, k_{2n} , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n + k_{n+1} i \alpha_1 + k_{n+2} i \alpha_2 + \cdots + k_{2n} i \alpha_n = 0 \quad (2)$$

整理式 (2) 得

$$(k_1 + ik_{n+1}) \alpha_1 + (k_2 + ik_{n+2}) \alpha_2 + \cdots + (k_n + ik_{2n}) \alpha_n = 0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 在 C 上线性无关, 所以 $k_j + ik_{n+j} = 0$, 从而 $k_j = 0, k_{n+j} = 0$ ($j = 1, 2, \cdots, n$), 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, i\alpha_1, i\alpha_2, \cdots, i\alpha_n$ 在 R 上线性无关; (3 分) 可见该元素组是 R 上的 V 的一个基, 于是 R 上的 V 的维数是 $2n$. (1 分)

五、解 1. 对 $\forall X \in V$, 有 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{12} & -x_{13} & x_{12} & x_{13} \\ -x_{22} & -x_{23} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} =$

$$x_{12} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{13} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 分)





又 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 线性无关, 所以 A_1, A_2, A_3, A_4 是 V 的一个基. (3分)

$$2. \text{ 对 } \forall \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \in V^\perp, \text{ 有 } \langle \mathbf{X}, \mathbf{A}_i \rangle = 0 (i=1, 2, 3, 4), \text{ 从而 } \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_4 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases} \quad (3 \text{ 分}), \text{ 解此方程组}$$

得 $(x_1, x_2, \dots, x_6)^T = k_1(1, 1, 1, 0, 0, 0)^T + k_2(0, 0, 0, 1, 1, 1)^T$.

故 $\mathbf{X} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 于是 V^\perp 的一个基为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2分)

六、解 1. T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$, (2分) 可求得 $\det A = (t+2)(t-1)^2$, 当 $\det A \neq 0$,

即 $t \neq -2$ 且 $t \neq 1$ 时, T 是可逆变换. (3分)

当 $t = 0$ 时, 可求得 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (2分) 于是

$$\begin{aligned} T^{-1}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) &= x_1T^{-1}(\alpha_1) + x_2T^{-1}(\alpha_2) + x_3T^{-1}(\alpha_3) \\ &= \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3)\alpha_1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3)\alpha_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)\alpha_3 \quad (3 \text{ 分}) \end{aligned}$$

2. 设 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 x , 由于 $T(\alpha) = \alpha$, 由坐标变换公式得 $Ax = x$, 于是 $\det(A - E) = 0$ (3分), 即

$$\begin{vmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+1) = 0$$

可见当 $t = -1$ 或 $t = 2$ 时, 有非零的 α 使得 $T(\alpha) = \alpha$. (2分)

当 $t = -1$ 时, 由 $(A - E)x = 0$ 解得 $p_1 = (1, 1, 1)^T$, 故 $\alpha = k_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ ($k_1 \neq 0$) (1分)

当 $t = 2$ 时, 由 $(A - E)x = 0$ 解得 $p_2 = (1, -1, 0)^T, p_3 = (0, 1, -1)^T$, 故

$$\alpha = k_2\alpha_1 + (k_3 - k_2)\alpha_2 - k_3\alpha_3 \quad (k_2, k_3 \text{ 不同时为零}) \quad (2 \text{ 分})$$

七、解 1. 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$, 其中 $y_1 = x_1 + tx_2, y_2 = x_2 + tx_3, y_3 = x_3 + tx_1$, 则有

$$y = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} x = Cx \quad (2 \text{ 分})$$

从而二次型为 $f = x^T C^T C x$. 由于 $\text{rank } C^T C = \text{rank } C$, 且由 $\det C = 1 + t^3 = 0$ 得 $t = -1$, 此时 $\text{rank } C = 2$, 故 $t = -1$ 时, 二次型 f 的秩为 2. (3分)

2. 当 $\det C \neq 0$ 时, $C^T C$ 是正定矩阵, (2分) 故当 $t \neq -1$ 时, f 是正定二次型. (3分)

3. 当 $t = -1$ 时, 二次型的矩阵 $A = C^T C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, (2分) 可求得 $\det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda - 3)^2$,

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. (3分) 由 $Ax = 0$ 解得 $p_1 = (1, 1, 1)^T$; 而由 $(A - 3E)x = 0$ 解得 $p_2 = (1, -1, 0)^T, p_3 = (0, 1, -1)^T$; (2分) 正交化得 $\alpha_2 = (1, -1, 0)^T, \alpha_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)^T$. 单位化得

$$q_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)^T, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T, \quad q_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, -2)^T \quad (2 \text{ 分})$$





故正交矩阵 $Q = (q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, 二次型经正交变换 $x = Qz$ 化为 $f = 3z_1^2 + 3z_2^2$. (1分)

八、证 设 $\forall \alpha, \beta \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标分别为 x, y , 则有

$$(T\alpha, T\beta) = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay, \quad (\alpha, \beta) = x^T y$$

必要性: 当 T 是正交变换时, 由 $(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta)$ 得 $x^T A^T Ay = x^T y$, (2分) 分别取 $x, y = e_1, e_2, \dots, e_n$, 则有 $e_i^T A^T A e_j = e_i^T e_j$, (2分) 从而 $EA^T AE = EGE$, 即 $A^T GA = G$. (1分)

充分性: 如果有 $A^T GA = G$, 则有 $x^T A^T Ay = x^T y$ (3分), 故有 $(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta)$. (2分)

九、解 1. 对 $\forall f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in V$, 有 $T(f(x)) = (a_2 - a_1)x^2 + (2a_1 - a_2 - a_0)x + (a_0 - a_1)$.

由于 $a_2 - a_1 + 2a_1 - a_0 - a_2 + a_0 - a_1 = 0$, (3分) 所以 $T(f(x)) \in V$, 故 V 是 T 的不变子空间. (2分)

2. 对 $\forall f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in V$, 有 $f(x) = (-a_1 - a_0)x^2 + a_1 x + a_0 = a_1(x - x^2) + a_0(1 - x^2)$, 可见 $x - x^2, 1 - x^2$ 是 V 的一个基. (2分) 正交化得

$$g_1(x) = x - x^2, \quad g_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

单位化得 V 的标准正交基

$$q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - x^2), \quad q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x^2 - x + 2) \quad (3分)$$

可求得

$$T(q_1(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2x^2 + 3x - 1) = \frac{5}{2}q_1(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}q_2(x)$$

$$T(q_2(x)) = \frac{3}{\sqrt{6}}(1 - x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}q_1(x) + \frac{3}{2}q_2(x)$$

于是 T 在标准正交基 $q_1(x), q_2(x)$ 下的矩阵为 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$, (3分) 由于 $A^T = A$, 所以 T 是对称变换. (2分)

又 $\det(A - \lambda E) = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$ 得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$; (2分)

由 $(A - E)x = 0$ 解得 $p_1 = (1, \sqrt{3})^T$, 由 $(A - 3E)x = 0$ 解得 $p_2 = (\sqrt{3} - 1)^T$, (3分) 单位化得

$$q_1 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})^T, \quad q_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, -1)^T \quad (2分)$$

故 T 在标准正交基 $\frac{1}{2}(q_1(x) + \sqrt{3}q_2(x)), \frac{1}{2}(\sqrt{3}q_1(x) - q_2(x))$ 下的对角阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. (3分)

十、证 因为 A 是实对称矩阵, 所以 A 可与对角阵相似; (2分) 于是对于 A 的任意特征值 λ , 如果它是 r 重特征值, 则对应的线性无关的特征向量就有 r 个. (3分)

设 λ 是 A 的某个特征值, 对于 $(A - \lambda E)x = 0$, 由 $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$, 且 $\det(A - \lambda E) = 0$ 得 $\text{rank}(A - \lambda E) = n - 1$, (3分) 于是对应于 λ 的线性无关的特征向量只有 1 个, 故 λ 是单根. (2分) 从而 A 的 n 个特征值互异.

2016 年试题

一、是非题 (用 T 与 F 分别表示是与非, 每题 3 分, 本题满分 15 分)

1. 设 T, S 均是欧氏空间 V 上的两个线性变换, 则 TS 也是 V 上的线性变换. ()

2. 设 T 是欧氏空间 V 上的正交变换, 若 V 上向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则向量组 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), T(\alpha_3)$ 线性无关. ()





3. 如果线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则矩阵 A 与 B 等价. ()
4. 如果 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 则 A 一定与对角矩阵相似. ()
5. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则方阵 A 与 B 合同. ()

二、填空题(每空 3 分 本题满分 15 分)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

如果 $\det B = 6$, 则 $\det A =$ _____.

2. 三阶方阵 A 的三个特征值互不相同, 且 $\det A = 0$, 则 $\text{rank } A^* =$ _____.

3. 已知线性空间 $\mathbf{R}[x]_2$ 的子空间

$$V_1 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 = a_1\}, \quad V_2 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_1 = 2a_0\},$$

则 V_1 与 V_2 的交 $V_1 \cap V_2$ 的维数 $\dim(V_1 \cap V_2) =$ _____.

4. 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解, 则齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} y = 0$ 的基础解系

含有的向量个数为 _____.

5. 设 A 为 2 阶方阵, 2 维列向量组 α_1, α_2 线性无关, 且满足 $A\alpha_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的全部特征值是 _____.

三、(本题满分 10 分)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & \cdots & x & x & x+1 \\ x & \cdots & x & x+2 & x \\ x & \cdots & x+3 & x & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+n & \cdots & x & x & x \end{vmatrix}$$

四、(本题满分 15 分)

已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, t+1)^T, \alpha_2 = (2, t+2, 2)^T, \alpha_3 = (t+3, 3, 3)^T, \beta = (1, 1, 1)^T$. 问 t 满足什么条件时:

- β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示?
- β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?
- β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一? 写出相应的表示式.

五、(本题满分 10 分)

已知三阶方阵 $A = \alpha\beta^T$, 其中 $\alpha = (1, t, 2)^T, \beta = (2, 3, 2)^T$, 问 t 为何值时, 方阵 A 不与对角矩阵相似, 且写出其 Jordan 标准形.

六、(本题满分 20 分)

设 T 是三维线性空间 V 上的线性变换, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一个基, 且

$$T(\alpha_1) = t\alpha_1 + \alpha_2, \quad T(\alpha_2) = \alpha_1 + t\alpha_2 + \alpha_3, \quad T(\alpha_3) = \alpha_2 + t\alpha_3$$

- 问 t 满足什么, T 是可逆变换, 且当 $t = 1$ 时, 求 T 的逆变换 T^{-1} ;
- 问 t 为何值时, V 上存在非零元素 α , 使得 $T(\alpha) = 2\alpha$; 且求全部非零元素 α .

七、(本题满分 20 分)

已知二次曲面方程 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2axy + 4xz = 5$ 经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$





化为椭圆柱面方程 $2v^2 + 4w^2 = 5$.

1. 求参数 α ;

2. 求正交矩阵 Q .

八、(本题满分 15 分)

已知三阶方阵 A 与 3 个三维非零列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1, \quad A\alpha_2 = 2\alpha_2, \quad A\alpha_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3$$

1. 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

2. 计算 A 的行列式 $\det A$.

九、(本题满分 20 分)

已知欧氏空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的内积为

$$(A, B) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} b_{ij}, \quad \text{其中 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

T 是 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 上的线性变换

$$T(X) = PX, \quad \text{其中 } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的子空间

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = 2b, c = 2d, a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

1. 求 V 的一个标准正交基;

2. 证明: V 是 T 的不变子空间;

3. 证明: T 是 V 上的对称变换, 且求 V 中的一个标准正交基, 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

十、(本题满分 10 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是欧氏空间 V 的基, 证明: 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为正定矩阵.

2016 年试题参考解答

一、1. T; 2. T; 3. F; 4. T; 5. F.

二、1. 3; 2. 1; 3. 1; 4. $m-n$; 5. $-1, 3$.

$$\text{三、解} \quad D_n \frac{r_i - r_j}{i=2, \dots, n} \begin{vmatrix} x & \cdots & x & x+1 \\ 0 & \cdots & 2 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分}) \frac{c_n + \frac{1}{i} c_i}{i=1, \dots, n-1}$$

$$\begin{vmatrix} x & \cdots & x & x+1 + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x}{n} \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分}) =$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} n! \left(1 + x \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \quad (2 \text{ 分})$$

四、解 设有一组数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$$

(1)





1. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 可求得 $\det A = -t^2(t+6) \neq 0$, (3分) 所以 $t \neq 0$ 且 $t \neq -6$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示. (2分)

2. 当 $t = -6$ 时, 由于

$$\hat{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3分)$$

$\text{rank } A = 2 < 3 = \text{rank } \hat{A}$, 方程组无解, 故 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. (2分)

2. 当 $t = 0$ 时, 由于

$$\hat{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2分)$$

$\text{rank } A = \text{rank } \hat{A} = 1 < 3$, 方程组有无穷多解, 故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法不唯一. 可解得

$$(k_1, k_2, k_3)^T = (1, 0, 0)^T + s(-2, 1, 0)^T + t(-3, 0, 1)^T \quad (2分)$$

故有

$$\beta = (1 - 2s - 3t)\alpha_1 + s\alpha_2 + t\alpha_3 \quad (s, t \text{ 任意}) \quad (1分)$$

五、解 因为 $A^2 = \alpha(\beta^T \alpha)\beta^T = (6 + 3t)A$, 又 $\text{rank } A = 1$, 且 $\text{tr } A = 6 + 3t$, 所以 A 的特征值为 $0, 0, 6 + 3t$; (3分)

当 $t = -2$ 时, A 的特征值为 $0, 0, 0$. 又 $A \neq O$, 所以 A 不能对角化. (3分) 此时 $\text{rank } A = 1$, 对应于 0 的线性无关的特征向量有 2 个, (2分) 故 A 的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2分)$$

六、解 1. T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$, 可求得 $\det A = t^3 - 2t$, 所以当 $\det A \neq 0$, 即

$t \neq 0$, 且 $t \neq \pm\sqrt{2}$ 时, T 是可逆变换. (5分)

当 $t = 1$ 时, 可求得 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (2分) 所以

$$T^{-1}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) = x_1T^{-1}(\alpha_1) + x_2T^{-1}(\alpha_2) + x_3T^{-1}(\alpha_3) \\ = (x_2 - x_3)\alpha_1 + (x_1 - x_2 + x_3)\alpha_2 + (x_2 - x_1)\alpha_3 \quad (3分)$$

2. 设 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 x , 则由 $T(\alpha) = 2\alpha$, 得 $Ax = 2x$, 于是 $\det(A - 2E) = 0$ (3分), 即

$$\begin{vmatrix} t-2 & 1 & 0 \\ 1 & t-2 & 1 \\ 0 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-2-\sqrt{2})(t-2+\sqrt{2}) = 0$$

故当 $t = 2$ 或 $2 + \sqrt{2}$ 或 $2 - \sqrt{2}$ 时, 有非零的 α 使得 $T(\alpha) = 2\alpha$. (2分)

当 $t = 2$ 时, 由 $(A - 2E)x = 0$ 解得 $p_1 = (1, 0, -1)^T$, 故 $\alpha = k_1(\alpha_1 - \alpha_3)$ ($k_1 \neq 0$). (2分)

当 $t = 2 + \sqrt{2}$ 时, 由 $(A - 2E)x = 0$ 解得 $p_2 = (1, -\sqrt{2}, 1)^T$, 故 $\alpha = k_2(\alpha_1 - \sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3)$ ($k_2 \neq 0$). (2分)

当 $t = 2 - \sqrt{2}$ 时, 由 $(A - 2E)x = 0$ 解得 $p_3 = (1, \sqrt{2}, 1)^T$, 故 $\alpha = k_3(\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3)$ ($k_3 \neq 0$). (1分)

七、解 1. 二次曲面方程左端二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 由题意 A 正交相似于 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$,

所以 $0, 2, 4$ 是 A 的特征值, (4分) 故 $\det A = -2a^2 = 0$, 于是 $a = 0$ (2分).





2. 由 $Ax = 0$ 解得 $p_1 = (1, 0, -1)^T$, (2 分) 由 $(A - 2E)x = 0$ 解得 $p_2 = (0, 1, 0)^T$ (2 分)

由 $(A - 4E)x = 0$, 解得 $p_3 = (1, 0, 1)^T$; (2 分) 单位化得

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1)^T, \quad q_2 = (0, 1, 0)^T, \quad q_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)^T \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{故所求正交矩阵为 } Q = (q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \quad (4 \text{ 分})$$

八、证 设有一组数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0 \quad (1) \quad (2 \text{ 分})$$

式 ① 两端左乘 A 得

$$k_1 \alpha_1 + 2k_2 \alpha_2 + k_3 (\alpha_2 + 2\alpha_3) = 0 \quad (2)$$

式 ② - 式 ① 得

$$(k_2 + k_3) \alpha_2 + k_3 \alpha_3 = 0 \quad (3) \quad (3 \text{ 分})$$

式 ③ 两端左乘矩阵 A 得 $2(k_2 + k_3) \alpha_2 + k_3 (\alpha_2 + 2\alpha_3) = 0$

(4) (3 分)

式 ④ - 2 × 式 ③ 得 $k_3 \alpha_2 = 0$, 由 $\alpha_2 \neq 0$ 得 $k_3 = 0$, (2 分) 将其代入式 ④ 得 $k_2 = 0$, 再代入式 ①, 有 $k_1 = 0$,

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. (2 分)

$$2. \text{ 因为 } A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2 \text{ 分}) \text{ 由于 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关, 所以矩阵 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \text{ 可逆;}$$

$$\text{故有 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 从而 } \det A = 4. \quad (3 \text{ 分})$$

九、解 1. 对 $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ 有

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b \\ 2d & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是 V 的一个基. (2 分) 可求得

$$\langle B_1, B_2 \rangle = 0, \quad \langle B_i, B_i \rangle = 5 \quad (i = 1, 2)$$

所以 V 的标准正交基为 $A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3 分).

2. 对 $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V$, 有 $T(X) = PX = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \\ x_3 - x_1 & x_4 - x_2 \end{pmatrix}$, 利用 $x_1 = 2x_2, x_3 = 2x_4$, 得

$$x_1 - x_3 = 2(x_2 - x_4), \quad x_3 - x_1 = 2(x_4 - x_2) \quad (3 \text{ 分})$$

可见 $T(X) \in V$, 故 V 是 T 的不变子空间. (2 分)

3. 由于

$$T(A_1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A_1 - A_2, \quad T(A_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -A_1 + A_2 \quad (3 \text{ 分})$$

所以 T 在标准正交基 A_1, A_2 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 由于 $A^T = A$, 故 T 是对称变换. (2 分)





又由 $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda(\lambda - 2) = 0$ 得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$. (2 分)

由 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 解得 $\mathbf{p}_1 = (1, 1)^T$, 由 $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 解得 $\mathbf{p}_2 = (1, -1)^T$, (3 分) 单位化得

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)^T \quad (2 \text{ 分})$$

故 T 在标准正交基 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2), \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)$ 下的对角阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (3 分)

十、证 设 $\mathbf{A} = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{3 \times 3}$, 因为 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$, 所以 \mathbf{A} 是实对称矩阵. (3 分)

又对于 $\forall \alpha \neq \mathbf{0}$, 有 $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$, 设 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 则有

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0 \quad (5 \text{ 分})$$

故基的度量矩阵 \mathbf{A} 是对称正定矩阵. (2 分)

2017 年试题

一、是非题(用 T 与 F 分别表示是与非, 每题 3 分 本题满分 15 分)

1. 设 T, S 均是欧氏空间 V 上的两个对称变换, 则 TS 也是 V 上的对称变换. ()
2. 如果 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 的秩为 r , 那么它的任何 s 行组成的子矩阵的秩大于或等于 $r + s - m$. ()
3. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是 n 阶方阵, 且满足 $\mathbf{AB} = 2\mathbf{A} + \mathbf{B}$, 则 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. ()
4. 设 n 阶方阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} - \mathbf{E}$, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ 可逆 (\mathbf{E} 为 n 阶单位矩阵). ()
5. 三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_2 - x_1)^2$ 是正定的. ()

二、填空题(每空 3 分, 本题满分 15 分)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 3 维列向量, 记矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \mathbf{B} = (\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_4)$ 如果 $\det \mathbf{A} = 2, \det \mathbf{B} = 3$, 则 $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 三阶方阵 \mathbf{A} 的行列式 $\det \mathbf{A} = 0$, 则 $\text{rank}(\mathbf{A}^*)^* = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知线性空间 $\mathbf{R}[x]_2$ 上的线性变换 T 为

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 - a_1)x^2 + (a_1 - a_0)x + (a_0 - a_3)$$

则 $\text{rank} T = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有且仅有 s 个线性无关的解向量, 则对应的齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系含有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个向量.

5. 设实方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 问 a 满足 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, \mathbf{A} 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 合同.

三、(本题满分 10 分)

设 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$, 其中 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是 \mathbf{A} 的 n 个列向量, 且满足 $\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = 0 (i \neq j)$. 证明:

$$\det |\mathbf{A}| = \|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_2\| \cdots \|\mathbf{a}_n\|, \text{ 其中 } \|\mathbf{a}_i\| = \sqrt{\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i}.$$

四、(本题满分 10 分)

设线性空间 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的两个子空间

$$V_1 = \{\mathbf{A} \mid \text{tr } \mathbf{A} = 0, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}\}$$

$$V_2 = \{a\mathbf{E} \mid a \in \mathbf{R}, \mathbf{E} \text{ 是 } n \text{ 阶单位矩阵}\}$$

证明 $\mathbf{R}^{n \times n} = V_1 \oplus V_2$, 其中 \oplus 表示直和.

五、(本题满分 15 分)

设三阶方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, ab \neq 0$.





1. 求方阵 A 的 Jordan 标准形 J ;
2. 求相似变换矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = J$.

六、(本题满分 20 分)

设 V 是 3 阶实反对称矩阵构成的实数域 \mathbf{R} 上线性空间, 对于 $A, B \in V$, 规定

$$(A, B) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AB^T)$$

1. 证明: (\cdot, \cdot) 是 V 上的一个内积;
2. V 上由此规定的内积便构成欧氏空间, 求 V 上的一个标准正交基;

3. 令 $\sigma: \mathbf{R}^3 \rightarrow V, \sigma(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, 证明 σ 是 \mathbf{R}^3 到 V 的一个同构映射.

七、(本题满分 20 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = tx_1^2 + tx_2^2 + tx_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1. t 为何值时, f 的秩为 1;
2. 取 $t = 2$, 试用正交变换化二次型为标准形;
3. 指出 $t = 2$ 时, $f = 1$ 表示何种二次曲面?

八、(本题满分 15 分)

斐波那契(Fibonacci)数列是 $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. 它满足 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3), F_1 = 1, F_2 = 2$.

1. 证明 Fibonacci 数列的通项 F_n 可由下述行列式表示:

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 求 Fibonacci 数列的通项公式.

九、(本题满分 20 分)

已知欧氏空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

其中 E_{ij} 是第 i 行第 j 列元素为 1 其余皆为 0 的 2 阶方阵. $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的子空间

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2} \right\}$$

T 是 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 上的线性变换, 且

$$T \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_4 & x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$$

1. 求子空间 W 的一个标准正交基;
2. 证明 W 是 T 的不变子空间;





3. 证明 T 是 W 上的对称变换;

4. 求 W 中的一个标准正交基, 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

十、(本题满分 10 分)

设 $n-1$ 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵为 B , 把 B 划去第 j 列得到的 $n-1$ 阶子式记作 D_j , 令

$$\eta = \begin{pmatrix} D_1 \\ -D_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} D_n \end{pmatrix}$$

证明: 如果 $\eta \neq 0$, 那么 η 是这个齐次线性方程组的一个基础解系.

2017 年试题参考解答

一、1. F; 2. T; 3. T; 4. T; 5. F.

二、1. 30; 2. 0; 3. 2; 4. $s-1$; 5. $a < \frac{1}{2}$.

三、证 因为 $A^T A = \text{diag}(\|a_1\|^2, \|a_2\|^2, \dots, \|a_n\|^2)$, (5 分) 所以

$$\det(A^T A) = \det(\text{diag}(\|a_1\|^2, \|a_2\|^2, \dots, \|a_n\|^2)) = \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \cdots \|a_n\|^2 \quad (3 \text{ 分})$$

故 $|\det A| = \|a_1\| \|a_2\| \cdots \|a_n\|$. (2 分)

四、证 对于 $\forall A \in V_1 \cap V_2$, 因为 $A = aE$, 且 $\text{tr} A = 0$, 所以 $A = O$, 故 $V_1 \cap V_2 = \{O\}$ (3 分); 又对于 $\forall A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 有

$$A = \left(A - \frac{\text{tr} A}{n} E\right) + \frac{\text{tr} A}{n} E, \quad \text{其中 } A - \frac{\text{tr} A}{n} E \in V_1, \frac{\text{tr} A}{n} E \in V_2, \quad (5 \text{ 分}) \text{ 所以 } \mathbf{R}^{n \times n} = V_1 \oplus V_2 \quad (2 \text{ 分})$$

五、解 1. 因为 $\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)^3$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. (2 分)

又 $\text{rank}(A - 2E) = 2$, 所以对应 3 重特征值 2, 只有一个线性无关的特征向量, (2 分) 所以 A 的 Jordan 标

准形为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$. (1 分)

2. 由 $(A - 2E)x = 0$, 解得 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (3 分)

由 $(A - 2E)p_2 = p_1$ 解得 $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$, (3 分) 由 $(A - 2E)p_3 = p_2$ 解得 $p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{a^3} \\ \frac{1}{a^2} \end{pmatrix}$. (3 分)

故 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$. (1 分)

六、1. 证 因为

$$(A, B) = \frac{1}{2} \text{tr}(AB^T) = \frac{1}{2} \text{tr}(BA^T) = (B, A) \quad (2 \text{ 分})$$

$$(kA, B) = \frac{1}{2} \text{tr}(kAB^T) = k \left(\frac{1}{2} \text{tr}(AB^T) \right) = k(A, B) \quad (1 \text{ 分})$$





$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \text{tr}((\mathbf{A} + \mathbf{C})\mathbf{B}^T) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) + (\mathbf{C}, \mathbf{B}) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{当 } \mathbf{A} \neq \mathbf{O} \text{ 时, } (\mathbf{A}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0. \quad (1 \text{ 分})$$

当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 时, $(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 0$, (1 分) 所以 (\cdot, \cdot) 是 V 上的一个内积;

$$2. \text{ 因为 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 两两正交, 所以是 } V \text{ 的正交基.} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 是 } V \text{ 的标准正交基.} \quad (2 \text{ 分})$$

3. 证 因为

$$\sigma(k\mathbf{x} + l\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & kx_1 + ly_1 & kx_2 + ly_2 \\ -kx_1 - ly_1 & 0 & x_3 \\ -kx_2 - ly_2 & -kx_3 - ly_3 & 0 \end{pmatrix} = k\sigma(\mathbf{x}) + l\sigma(\mathbf{y})$$

所以 σ 是线性映射. (3 分)

$$\text{又对于任意反对称矩阵 } \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 都有 } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ 使得 } \sigma(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 σ 是满射. (3 分)

又若 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{y})$, 则有 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 所以 σ 是单射, (3 分) 故 σ 是 \mathbf{R}^3 到 V 的一个同构映射. (1 分)

$$\text{七、解 } 1. \text{ 二次型的矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix}, \quad (2 \text{ 分}) \text{ 由 } \det \mathbf{A} = (t-2)(t+1)^2 = 0 \text{ 得 } t = 2, -1. \quad (2 \text{ 分})$$

当 $t = 2$ 时, $\text{rank } \mathbf{A} = 2$, 当 $t = -1$ 时, $\text{rank } \mathbf{A} = 1$, 所以 $t = 1$. (2 分)

2. 当 $t = 2$ 时, 由 $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = -\lambda(3 - \lambda)^2 = 0$ 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. (2 分)

$$\text{当 } \lambda_1 = 0 \text{ 时, 由 } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 得 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{当 } \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \text{ 时, 由 } (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 得 } \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分}). \text{ 正交化得}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{p}_2, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \mathbf{p}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{单位化得 } \mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

故正交矩阵 $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, 正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 化二次型为标准形 $f = 3y_2^2 + 3y_3^2$. (2 分)

3. $f = 1$ 表示圆柱面. (2 分)

八、证 1. 设该 n 阶行列式为 D_n , 按第 1 行展开得 $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, 又 $D_1 = 1, D_2 = 2$, 所以 $F_n = D_n$. (5 分)

2. 因为 $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ 的特征方程为 $r^2 - r - 1 = 0$, 解得 $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 所以





$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (5 \text{ 分})$$

利用 $F_1 = 1, F_2 = 2$, 解得 $c_1 = c_2 = 1$. 故 Fibonacci 数列的通项公式为

$$F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (5 \text{ 分})$$

九、解 1. W 的一个基为 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 由于 $(A_1, A_2) = 0$, 所以它们是 W 的一个正交基;

单位化得 $B_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} A_1, B_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} A_2$, 此是 W 的一个标准正交基. (5 分)

2. 因为

$$T(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1 + A_2 \in W, \quad T(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1 + A_2 \in W$$

所以 W 是 T 的不变子空间. (5 分)

3. 可求得 T 在标准正交基 $B_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} A_1, B_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} A_2$ 下的矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 它是对称矩阵, 所以 T 是 W 上的对称变换. (5 分)

4. 由 $\det(B - \lambda E) = \lambda(\lambda - 2) = 0$, 得 B 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$; 由 $Bx = 0$ 解得 $p_1 = (1, -1)^T$, 单位化得 $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$. 由 $(B - 2E)x = 0$ 解得 $p_2 = (1, 1)^T$, 单位化得 $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, 故有 W 的标准正交基

$\frac{\sqrt{2}}{2}(B_1 - B_2), \frac{\sqrt{2}}{2}(B_1 + B_2)$, T 在该标准正交基下的矩阵为对角矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 2 \end{pmatrix}$. (5 分)

十、证 因为 $\eta \neq 0$, 所以 $\text{rank } B = n - 1$, 故 $Bx = 0$ 的基础解系含一个解向量. (2 分)

设 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} b_i \\ B \end{pmatrix}$, 则有 $\det \tilde{B} = 0$. (3 分) 将 $\det \tilde{B}$ 按第 1 行展开, 则有 $\det \tilde{B} = b_i \eta$, 故

$$b_i \eta = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3 \text{ 分}) \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \eta = 0$$

所以 η 是齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的一个非零解, 故 η 是该齐次线性方程组的一个基础解系. (2 分)

2018 年试题

一、是非题(用 T 与 F 分别表示是与非, 每题 3 分 本题满分 15 分)

1. 设 T, S 均是欧氏空间 V 上的两个正交变换, 则 TS 也是 V 上的正交变换. ()
2. 如果 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 则 A 的秩等于 A 的非零特征值的个数. ()
3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 $\text{rank } A = m$, 则线性方程组 $Ax = b$ 一定有解. ()
4. 矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 合同. ()
5. 设 n 阶方阵 A 是负定的, 则方阵 A 的主对角元素 $a_{ii} < 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. ()





二、填空题(每空 3 分 本题满分 15 分)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1)$$

如果 $\det A = 2$, 则 $\det B =$ _____.

2. 设矩阵方程 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $X =$ _____.

3. 已知线性空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 上的线性变换

$$T(X) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 - x_4 & x_4 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \left(X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2} \right)$$

则 $\text{null} T =$ _____.

4. 对于非齐次线性方程组 $Ax = b, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 A 的三个 3 维列向量, 即 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 若 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = b, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2b$, 且 A 的伴随矩阵 $A^* \neq O$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系为 _____.

5. 设实方阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 问 a, b 满足 _____ 时, A 可与对角矩阵相似.

三、(本题满分 10 分)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_{n-1} & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2 x_{n-1} & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} x_1 & x_{n-1} x_2 & \cdots & 1+x_{n-1}^2 & x_{n-1} x_n \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n x_{n-1} & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

四、(本题满分 10 分)

设 x_1, x_2, x_3, x_4 是线性空间 V 的一个基, 又

$$y_1 = ax_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad y_2 = x_1 + ax_2 + x_3 + x_4$$

$$y_3 = x_1 + x_2 + ax_3 + x_4, \quad y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + ax_4$$

子空间 $V_1 = L(y_1, y_2), V_2 = L(y_3, y_4)$.

1. 问 a 满足什么条件时, $V_1 + V_2 = V$?

2. 问 a 满足什么条件时, $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$?

五、(本题满分 15 分)

设三阶方阵 $A = E + xy^T$, 其中 $x = (1, 0, 1)^T, y = (1, 2, 3)^T, E$ 是 3 阶单位矩阵.

1. 求方阵 A 的特征值;

2. 计算 A^n .

六、(本题满分 20 分)

设 P 是 $m \times n$ 的列满秩实矩阵, 在线性空间 \mathbf{R}^n 上, 对于列向量 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 定义

$$\langle x, y \rangle = (Px)^T Py,$$

令 $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m, T(x) = Px$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$.

1. 证明: $\langle x, y \rangle$ 是 \mathbf{R}^n 上的内积;

2. 证明 T 是 \mathbf{R}^n 到 \mathbf{R}^m 的一个线性映射, 且是单射.

七、(本题满分 20 分)

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶可逆实对称矩阵, 其最大特征值为 λ_n , 最小特征值为 λ_1, A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式,





二次型

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{\det \mathbf{A}} x_i x_j$$

1. 求二次型 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵;
2. 求二次型 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在条件 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 下的最大值和最小值.

八、(本题满分 15 分)

1. 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{n \times n}$, 证明 $\mathbf{A}^n, \mathbf{A}^{n-1}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{E}$ 在数域 \mathbf{K} 上线性相关 (\mathbf{E} 是 n 阶单位矩阵);
2. 若 T 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明 $T^n, T^{n-1}, \dots, T, T_e$ (T_e 表示 V 上的恒等变换) 线性相关.

九、(本题满分 20 分)

已知欧氏空间 $\mathbf{R}[x]_3$ 的基 $1, x, x^2, x^3$ 的度量矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}[x]_3$ 的子空间

$$W = \{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_2 - a_0 = 0, a_3 - a_1 = 0, a_i \in \mathbf{R} (i = 0, 1, 2, 3)\}$$

T 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 上的线性变换, 且

$$T(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

其中 $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]_3$.

1. 求子空间 W 的一个标准正交基;
2. 证明 W 是 T 的不变子空间;
3. 证明: T 是 W 上的对称变换;
4. 求 W 中的一个标准正交基, 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

十、(本题满分 10 分)

设 T, S 是欧氏空间 V 上的两个线性变换, 且对于 $\forall x, y \in V$, 都有

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, S(y) \rangle$$

若 T 在 V 的标准正交基 x_1, x_2, \dots, x_n 下的矩阵为 \mathbf{A} , 证明: S 在标准正交基 x_1, x_2, \dots, x_n 下的矩阵为 \mathbf{A}^T .

2018 年试题参考解答

一、1. T; 2. T; 3. T; 4. F; 5. T.

二、1. 9; 2. $\begin{pmatrix} 1+k_1 & 2+k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$ (k_1, k_2 任意); 3. 1; 4. $(1, 2, 5)^T$; 5. $a \neq b$.

$$\begin{aligned} \text{三、} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & \cdots & x_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n x_1 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} \quad (2 \text{ 分}) \xrightarrow[i=2,3,\dots,n]{r_i - x_i r_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分}) \xrightarrow[i=2,3,\dots,n]{c_1 + x c_i} \\ &= \begin{vmatrix} 1+x_1^2+\cdots+x_n^2 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (4 \text{ 分}) = 1+x_1^2+\cdots+x_n^2 \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

四、解 1. 因为 $V_1 + V_2 = L(y_1, y_2, y_3, y_4)$, 又 $V_1 + V_2 = V$, 所以 y_1, y_2, y_3, y_4 线性无关, 即





$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

可逆(3分). 由 $\det A = (a+3)(a-1)^3 \neq 0$ 得 $a \neq -3$ 且 $a \neq 1$, 故 $a \neq -3$ 且 $a \neq 1$ 时, $V_1 + V_2 = V$. (2分)

2. 对 $\forall x \in V_1 \cap V_2$, 有 $x = k_1 y_1 + k_2 y_2 = k_3 y_3 + k_4 y_4$, 从而 $k_1 y_1 + k_2 y_2 - k_3 y_3 - k_4 y_4 = \mathbf{0}$

因为 $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$, 所以 $k_1 y_1 + k_2 y_2 - k_3 y_3 - k_4 y_4 = \mathbf{0}$ 有非零解, 故 y_1, y_2, y_3, y_4 线性相关, 即 $a = -3$ 或 $a = 1$. (3分)

当 $a = -3$ 时, 由于

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $k_1 = -k_4, k_2 = -k_4, k_3 = k_4$, 故

$$x = -k_4 y_1 - k_4 y_2 = -k_4 (y_1 + y_2) = 2k_4 (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

从而 $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ 是 $V_1 \cap V_2$ 的一个基, 即 $\dim V_1 \cap V_2 = 1 > 0$.

当 $a = 1$ 时, 有 $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$, 故 $\dim V_1 \cap V_2 = 1 > 0$. (2分)

五、解 1. 因为 $\text{rank}(xy^T) = 1$, 又 $\text{tr}(xy^T) = 4$, 所以 xy^T 的特征值为 $0, 0, 4$. (3分) 故 $E + xy^T$ 的特征值为 $1, 1, 5$. (2分)

2. 由于 $\text{rank}(xy^T) = 1$, 所以 xy^T 对应于特征值 0 的线性无关的特征向量有 2 个, 故 xy^T 可对角化. (3分)

由方程组 $xy^T z = \mathbf{0}$ 解得 $p_1 = (-2, 1, 0)^T, p_2 = (-3, 0, 1)^T$. (2分)

又由方程组 $(xy^T - 4E)z = \mathbf{0}$ 解得 $p_3 = (0, 1, 0)^T$. 构造矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, 则

$$P^{-1}(E + xy^T)P = \text{diag}(1, 1, 5)$$

从而 $E + xy^T = P \text{diag}(1, 1, 5) P^{-1}$. (3分) 故

$$A^n = P \text{diag}(1, 1, 5^n) P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5^n - 1}{2} & 5^n & \frac{3(5^n - 1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{分})$$

六、证 1. 因为

$$\textcircled{1} \langle x, y \rangle = (Px)^T (Py) = ((Px)^T (Py))^T = (Py)^T (Px) = \langle y, x \rangle; (2 \text{分})$$

$$\textcircled{2} \langle x + y, z \rangle = (P(x + y))^T (Pz) = (Px)^T (Pz) + (Py)^T (Pz) = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle; (2 \text{分})$$

$$\textcircled{3} \langle kx, y \rangle = (kPx)^T (Py) = k(Px)^T (Py) = k \langle x, y \rangle; (2 \text{分})$$

④ 当 $x \neq \mathbf{0}$ 时, $Px \neq \mathbf{0}$ (因为 P 是列满秩矩阵), 从而 $\langle x, x \rangle = (Px)^T (Px) > 0$; (3分) 当 $x = \mathbf{0}$ 时, $Px = \mathbf{0}$, 于是 $\langle x, x \rangle = (Px)^T (Px) = 0$.

故 $\langle x, y \rangle$ 是 \mathbf{R}^n 上的内积. (1分)

$$2. \text{ 因为 } T(kx + ly) = P(kx + ly) = P(kx) + P(ly) = kT(x) + lT(y)$$

所以 T 是线性映射. (4分)

又若 $T(x) = T(y)$, 则有 $Px = Py$, 即有 $P(x - y) = \mathbf{0}$. 由于 P 是列满秩矩阵, 所以该齐次方程组只有零解. (3分)

七、解 1. 因为 $A^T = A$, 所以 $(A^*)^T = A^*$, 且由 $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$ 得 $g = x^T A^{-1} x$. (3分) 故二次型 g 的矩阵为 A^{-1} . (2分)

2. 对实对称矩阵 A 存在正交矩阵 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. (2分) 所以





$$Q^T A^{-1} Q = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \quad (3 \text{ 分})$$

故有正交变换 $x = Qy$, 使得

$$g = \frac{1}{\lambda_1} y_1^2 + \frac{1}{\lambda_2} y_2^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} y_n^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = \frac{1}{\lambda_1} y^T y$$

又 $y^T y = x^T x = 1$, 所以 $g(x) \leq \frac{1}{\lambda_1}$. (3 分)

又当 $x = q_1$ 时, 有 $g(x) = \frac{1}{\lambda_1}$, (2 分) 故 $\max_{\|x\|=1} g(x) = \frac{1}{\lambda_1}$. (2 分)

同理 $\min_{\|x\|=1} g(x) = \frac{1}{\lambda_n}$. (3 分)

八、证 1. 设 $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, 则有 $f(A) = O$; (2 分) 由于 $f(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \dots + \det A$, 便有

$$f(A) = (-1)^n A^n + \dots + (\det A) E = O$$

所以 A^n, A^{n-1}, \dots, E 线性相关. (3 分)

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, 且 T 在该基下的矩阵为 A . (2 分) 记 $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, 则有 $f(T)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵是 $f(A)$. (3 分) 由 1 知 $f(A) = O$, 故 $f(T)$ 是零变换, (3 分) 即

$$f(T) = (-1)^n T^n + \dots + (\det A) T_e = O$$

故 T^n, T^{n-1}, \dots, T_e 线性相关. (2 分)

九、解 1. 对 $\forall a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in W$, 因为 $a_2 = a_0, a_3 = a_1$, 所以

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_1 x^3 + a_0 x^2 + a_1 x + a_0 = a_1 (x^3 + x) + a_0 (x^2 + 1)$$

所以 $x^3 + x, x^2 + 1$ 是 W 的一个基; (2 分) 又

$$\langle x^3 + x, x^2 + 1 \rangle = 0, \quad \langle x^3 + x, x^3 + x \rangle = 4, \quad \langle x^2 + 1, x^2 + 1 \rangle = 4$$

所以 $f_1(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x), f_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ 是 W 的标准正交基. (3 分)

2. 因为

$$T(f_1(x)) = x^3 + x^2 + x + 1 = 2f_1(x) + 2f_2(x), \quad T(f_2(x)) = x^3 + x^2 + x + 1 = 2f_1(x) + 2f_2(x) \quad (3 \text{ 分})$$

可见 $T(f_1(x)) \in W, T(f_2(x)) \in W$, 故 W 是 T 的不变子空间. (2 分)

3. 可求得 $T(f_1, f_2) = (f_1, f_2)A$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, (3 分) 因为 A 是实对称矩阵, 所以 T 是对称变换. (2 分)

4. 由 $\det(A - \lambda E) = -\lambda(4 - \lambda) = 0$, 得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$. (2 分)

由 $Ax = 0$ 解得 $p_1 = (1, -1)^T$, 由 $(A - 4E)x = 0$ 解得 $p_2 = (1, 1)^T$, 单位化得

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)^T, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T \quad (2 \text{ 分})$$

则 T 在标准正交基 $\frac{\sqrt{2}}{2}(f_1 - f_2), \frac{\sqrt{2}}{2}(f_1 + f_2)$ 下的矩阵为对角阵 $\text{diag}(0, 4)$. (1 分)

十、证 设 S 在基 x_1, x_2, \dots, x_n 下的矩阵为 B , x, y 在基 x_1, x_2, \dots, x_n 下的坐标分别为 \tilde{x}, \tilde{y} . 因为

$$\langle T(x), y \rangle = (A\tilde{x})^T \tilde{y} = \tilde{x}^T A^T \tilde{y}^T, \quad (3 \text{ 分}) \quad \langle x, T(y) \rangle = \tilde{x}^T B \tilde{y}$$

所以

$$\tilde{x}^T A^T \tilde{y} = \tilde{x}^T B \tilde{y}$$

取 \tilde{x}, \tilde{y} 分别为 e_1, e_2, \dots, e_n , 便有 $e_i^T A^T e_j = e_i^T B e_j$, (3 分) 从而 $EA^T E = EBE$. (2 分) 故 $B = A^T$.

2019 年试题

一、是非题(用 T 与 F 分别表示是与非, 每题 3 分 本题满分 15 分)

1. 线性空间 \mathbf{R}^3 的子集 $S = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 - \xi_2 = 1, \xi_i \in \mathbf{R} (i = 1, 2, 3)\}$ 是 \mathbf{R}^3 的子空间. ()

2. 设 T, S 均是线性空间 V 上的两个可逆的线性变换, 则 $T^{-1} + S^{-1}$ 也是 V 上的线性变换. ()





3. 若 T 是欧氏空间 V 上的变换, T 满足 $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \forall x, y \in V$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, 则 T 是 V 上的对称变换. ()

4. 设 T 是线性空间 V 上的线性变换, λ 是 T 的 2 重特征值, 则特征子空间 V_λ 的维数是 2. ()

5. 设实方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 合同.

二、填空题(每空 3 分 本题满分 15 分)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 且 A 可逆, 又记

$$B = (\alpha_1 + b\alpha_2, \alpha_2 + b\alpha_3, \alpha_3 + b\alpha_1)$$

则实数 b 满足 _____, 方阵 B 可逆.

2. 设线性空间 $\mathbf{R}^{2 \times 3}$ 的子空间 $W = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$, 其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $\dim W =$ _____.

3. 已知 T 是线性空间 $\mathbf{R}[x]_2$ 上的线性变换,

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2)x + (a_0 + a_1 + a_2)$$

则 T 的特征值为 _____.

4. 已知非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有 s 个线性无关的解向量, 其中 A 是方阵; 若 0 是方阵 A 的 k 重特征值, 则重数 k 满足 _____.

5. 设 x_1, x_2 是数域 \mathbf{K} 上的线性空间 V^2 的一个基, T 是 V^2 上的线性变换, 若

$$T(k_1x_1 + k_2x_2) = (k_1 + k_2)x_1 + (k_1 + 2k_2)x_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbf{K}$$

则 T 的逆变换为 $T^{-1}(k_1x_1 + k_2x_2) =$ _____.

三、(本题满分 10 分)

计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ c & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$$

四、(本题满分 10 分)

设 T 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $T^2 = T$, 又 T_e 是 V 上的单位变换.

证明: $V = R(T) \oplus R(T - T_e)$, 其中 \oplus 表示直和, $R(T)$ 与 $R(T - T_e)$ 分别为 T 与 $T - T_e$ 的值域.

五、(本题满分 15 分)

设 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. 求方阵 A 的 Jordan 标准形 J ;

2. 求相似变换矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$;

3. 求 $A^k (k = 1, 2, \cdots)$.

六、(本题满分 15 分)

设在 \mathbf{R}^3 上规定二元实值函数

$$\langle x, y \rangle = x^T Ay$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T, y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T \in \mathbf{R}^3, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.





1. 证明 $\langle x, y \rangle$ 是 \mathbf{R}^3 上的一个内积;

2. 在 \mathbf{R}^3 上, 由此规定的内积构成欧氏空间, 若欧氏空间 \mathbf{R}^3 的子空间 W 为

$$W = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 = \xi_2, \xi_1 \in \mathbf{R} \quad (i = 1, 2, 3)\}$$

求 W 的正交补 W^\perp 的一个基.

七、(本题满分 20 分)

已知三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - tx_2)^2 + (x_2 - tx_3)^2 + (x_3 - tx_1)^2$, 其中 t 是实参数.

1. 求二次型 f 的秩;

2. 在 $t = 1$ 时, 试用正交变换化二次型 f 为标准形;

3. 指出 $f = 1$ 表示何种二次曲面?

八、(本题满分 20 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbf{R}^n 中的一个基, 则由 $T\alpha_i = \alpha_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1), T\alpha_n = \mathbf{0}$ 定义了一个线性变换 T .

1. 求 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵 A ;

2. 证明 $T^n = O, T^{n-1} \neq O$;

3. 设 S 是 \mathbf{R}^n 上的线性变换, 且满足 $S^n = O, S^{n-1} \neq O$, 则在 \mathbf{R}^n 中存在一个基, 使得 S 在该基下的矩阵是 A .

九、(本题满分 20 分)

已知 x_1, x_2, x_3 是欧氏空间 V^3 的一个基, 该基的度量矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

V^3 上的线性变换 T 为

$$T(x_1) = 2x_1 + x_2 + x_3, \quad T(x_2) = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad T(x_3) = x_1 + x_2 + 2x_3$$

1. 求空间 V^3 的一个标准正交基;

2. 问 T 是否为对称变换?

3. 求 V^3 的一个基, 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

十、(本题满分 10 分)

设 A, B 均为 n 阶实方阵, 向量空间 $V = \{Bx \mid ABx = \mathbf{0}, x \in \mathbf{R}^n\}$, 证明:

$$\dim V = \text{rank } B - \text{rank}(AB)$$

2019 年试题参考解答

一、1. F; 2. T; 3. F; 4. F; 5. T.

二、1. $b \neq -1$; 2. 3; 3. 0, 0, 3; 4. $k \geq s-1$; 5. $(2k_1 - k_2)x_1 + (k_2 - k_1)x_2, k_1, k_2 \in \mathbf{K}$

三、解

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ c & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[4']{c_2 + \cdots + c_{n+1}} \begin{vmatrix} a & nb & b & \cdots & b \\ c & 3 + (n-1)2 & 2 & \cdots & 2 \\ c & 3 + (n-1)2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & 3 + (n-1) & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[2']{r_i - r_2, i=3, \dots, n+1} \begin{vmatrix} a & nb & b & \cdots & b \\ c & 3 + (n-1)2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[3']{3'} \begin{vmatrix} a & nb \\ c & 3 + (n-1)2 \end{vmatrix} \xrightarrow[1']{1'} a[3 + (n-1)2] - ncb$$





四、证 对于 $\forall x \in R(T) \cap R(T - T_e)$, 存在 u, v 使得 $x = Tu = (T - T_e)v$, (2 分) 两端作 T 变换, 则有

$$Tx = T^2u = (T^2 - T)v = 0, \text{ 又 } T^2u = Tu = x$$

所以 $x = 0$ (2 分). 故 $R(T) \cap R(T - T_e) = \{0\}$, 这表明 $R(T) + R(T - T_e)$ 为直和. (1 分)

显然 $R(T) \oplus R(T - T_e) \in V$. 又对于 $\forall x \in V$, 有

$$x = Tx + T_e x - Tx = Tx + (T_e - T)x \quad (3 \text{ 分})$$

由于 $Tx \in R(T), (T - T_e)x \in R(T_e - T)$, 所以 $x \in R(T) \oplus R(T - T_e)$, (1 分) 于是

$$V \subset R(T) \oplus R(T - T_e)$$

故 $V = R(T) \oplus R(T - T_e)$. (1 分)

五、解

1. 设 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 因为 $\det A_1 = 0$, 所以 0 是 A_1 的特征值. (2 分) 又 $\text{tr} A_1 = 0$, 所以 A 的特征值是 0,

0, 2. (1 分) 因为 $\text{rank } A_1 = 1$, 所以对应 2 重特征值 0 只有一个线性无关的特征向量, 故 A 的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

2. 由 $A_1 x = 0$, 得 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 由 $A_1 x = p_1$ 解得 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (4 分) 故 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (4 分) 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

3. 因为 $A_1^k = P_1 J_1^k P_1^{-1}, J_1^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$, (2 分) 所以

$$A^k = \begin{cases} A, & k = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}, & k \geq 2 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

六、证 1. 因为

$$\textcircled{1} (y, x) = y^T A x = (y^T A x)^T = x^T A y = (x, y); \quad (2 \text{ 分})$$

$$\textcircled{2} (kx, y) = kx^T A y = k(x, y); \quad (2 \text{ 分})$$

$$\textcircled{3} (x + z, y) = (x + z)^T A y = x^T A y + z^T A y = (x, y) + (z, y), \quad (2 \text{ 分})$$

④ 因为 A 的顺序主子式 $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 2 > 0, \Delta_3 = 5 > 0$, 故 A 是正定矩阵. (2 分) 所以对于 $\forall x \neq 0$, 有 $(x, x) = x^T A x > 0$; 当 $x = 0$ 时, 有 $(x, x) = x^T A x = 0$; (2 分) 故 $(x, y) = x^T A y$ 是内积.

2. W 的一个基为 $x_1 = (1, 1, 0), x_2 = (0, 0, 1)$. (1 分)

若 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in W^\perp$, 则有 $(x, x_1) = x^T A x_1 = 0, (x, x_2) = x^T A x_2 = 0$, 即

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + 3\xi_3 = 0 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

解得 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (5k, -3k, k) (k \in \mathbf{R})$, 故 W 的正交补的一个基是 $(5, -3, 1)$. (2 分)

七、解 设 $y_1 = x_1 - tx_2, y_2 = x_2 - tx_3, y_3 = x_3 - tx_1, y = (y_1, y_2, y_3)^T$, 则有 $y = Cx$, 其中





$$C = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

于是 $f = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = (\mathbf{C}\mathbf{x})^T \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{x}$.

1. 因为 f 的秩 $= \text{rank} \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \text{rank} \mathbf{C}$, 而 $\det \mathbf{C} = 1 - t^3$, (3分) 所以, 当 $t = 1$, $\text{rank} \mathbf{C} = 2$, 即 f 的秩为 2; 当 $t \neq 1$ 时, $\text{rank} \mathbf{C} = 3$, 即 f 的秩为 3. (2分)

$$2. \text{ 设 } \mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ 分})$$

因为 $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = -\lambda(\lambda - 3)^2$, 所以 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$. (3分)

$$\text{由 } (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 解得 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \text{ 由 } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 解得 } \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ 分}) \text{ 由 Schmidt 正交化得}$$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

单位化得

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\bar{\mathbf{p}}_2}{\|\bar{\mathbf{p}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{p}_3}{\|\mathbf{p}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

正交矩阵

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 化二次型 f 为标准型 $f = 3y_1^2 + 3y_2^2$. (1分)

3. 当 $t = 1$ 时, $f = 1$ 表示圆柱面; (2分)

当 $t \neq 1$ 时, 因为 $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ 为正定矩阵, 所以 $f = 1$ 表示椭球面. (3分)

八、解 1. 因为 $T\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1), T\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, 所以 T 在基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 下的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

2. 可求得

$$\mathbf{A}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{O}$$

而 T^n, T^{n-1} 在基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 下的矩阵分别为 $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}, \mathbf{A}^{n-1} \neq \mathbf{O}$, 所以 $T^n = \mathbf{O}, T^{n-1} \neq \mathbf{O}$. (5分)

3. 设 S 在基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 下的矩阵为 \mathbf{B} . 因为 \mathbf{B} 一定与 Jordan 矩阵相似, 故存在可逆矩阵 \mathbf{P} 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$, 由于 $\mathbf{B}^k = \mathbf{P}\mathbf{J}^k\mathbf{P}^{-1}$, 且由 $S^n = \mathbf{O}$ 知 $\mathbf{J}^n = \mathbf{O}$, 由 $S^{n-1} \neq \mathbf{O}$, 有 $\mathbf{J}^{n-1} \neq \mathbf{O}$, 故

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$





所以存在一个基,不妨设该基为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 且 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$, T 在该基下的矩阵为 J , (2分) 取基 $\beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_1$, 则 S 在该基下的矩阵为 A . (3分)

九、解 1. 由 Schmidt 正交化得

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = x_3 - \frac{1}{2} y_2 = x_3 - \frac{1}{2} x_2 \quad (3 \text{ 分})$$

故标准正交基为

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2, \quad z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{\sqrt{6}}{3} (x_3 - \frac{1}{2} x_2) \quad (2 \text{ 分})$$

2. 因为

$$T(z_1) = T(x_1) = 2x_1 + x_2 + x_3 = 2z_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} z_2 + \sqrt{\frac{3}{2}} z_3$$

$$T(z_2) = T(\frac{1}{\sqrt{2}} x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + 2x_2 + x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{5}{2} z_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} z_3 \quad (3 \text{ 分})$$

$$T(z_3) = \frac{\sqrt{6}}{3} (\frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_3) = \frac{\sqrt{6}}{6} z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} z_2 + \frac{3}{2} z_3$$

所以 T 在标准正交基 z_1, z_2, z_3 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

由于 B 非对称矩阵, 所以 T 不是对称变换. (2分)

3. 因为 T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

可求得 $\det(A - \lambda E) = (4 - \lambda)(\lambda - 1)^2$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$. (4分)

$$\text{由 } (A - E)x = 0 \text{ 解得 } p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \text{由 } (A - 4E)x = 0 \text{ 解得 } p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ 分}) \text{ 故 } T \text{ 在基}$$

$$x_1 - x_2, \quad x_1 - x_3, \quad x_1 + x_2 + x_3$$

下的矩阵为对角矩阵 $\text{diag}(1, 1, 4)$. (1分)

十、证 因为 $V = \{Bx \mid ABx = 0, x \in R^n\} = \{y \mid Ay = 0, y \in R(B)\}$, (2分) 所以

$$R(AB) = L(Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n) = \{Ay \mid y \in R(B)\} \quad (\text{其中 } B = (b_1, b_2, \dots, b_n)) \quad (2 \text{ 分})$$

所以 $\dim V + \dim R(AB) = \dim R(B)$. (4分) 又 $\dim R(AB) = \text{rank}(AB)$, $\dim R(B) = \text{rank} B$, 故

$$\dim V = \text{rank} B - \text{rank}(AB) \quad (2 \text{ 分})$$

2020 年试题

一、是非题(用 T 与 F 分别表示是与非, 每题 3 分 本题满分 15 分)

1. 设 A, B 均为正定矩阵, 则 $\det(A + B) > 0$. ()
2. 设 T, S 均是线性空间 V 上的两个可逆的线性变换, 则 TS 也是 V 上可逆的线性变换. ()
3. T 是欧氏空间 V 上的正交变换, 则 T 在 V 的一个基下的矩阵是正交矩阵. ()





4. 设 T 是从线性空间 V^n 到线性空间 W^m 上的线性映射, 则 T 的秩 $\text{rank } T$ 与 T 的零度 $\text{null } T$ 的和等于 m , 即 $\text{rank } T + \text{null } T = m$. ()

5. 设实方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ 合同, 则 $a > \frac{1}{2}$. ()

二、填空题(每空 3 分 本题满分 15 分)

1. 设 A 为三阶方阵, 且 $\det A = 2$, 则 $\det(2A)^* =$ _____, 其中 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵.

2. 设线性空间 $\mathbf{R}[x]_3$ 的子空间 $W = L(f_1, f_2, f_3, f_4)$, 其中

$$f_1 = x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad f_2 = 2x^3 + x^2 + 3x + 2, \quad f_3 = x^3 - x^2 + 2x + 1, \quad f_4 = 2x^3 + x^2 + x + 1$$

则 W 的一个基是 _____.

3. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$, 若 $\text{rank}(AB) = 2$, 则 a 满足 _____.

4. 设 A 与 B 均为行矩阵, 且 $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 则 $(A^T B)^n =$ _____.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解向量, 且

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 1, 1)^T, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = (1, 2, 3)^T$$

若 $\text{rank } A = 3$, 则该线性方程组的通解是 _____.

三、(本题满分 10 分)

设

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

问: a 为何值时, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解? 且求通解.

四、(本题满分 10 分)

设线性空间 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的两个子空间

$$W_1 = \{A \mid A^T = -A, A \in \mathbf{R}^{n \times n}\}, \quad W_2 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 (i > j), A \in \mathbf{R}^{n \times n}\}$$

证明: $\mathbf{R}^{n \times n} = W_1 \oplus W_2$, 其中 \oplus 表示直和.

五、(本题满分 20 分)

设三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & a \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. 问 a 为何值时, 方阵 A 的 Jordan 标准形是 $J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

2. 求相似变换矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$;

3. 求 $A^k (k = 1, 2, \dots)$.

六、(本题满分 15 分)

设在 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 上规定二元实值函数

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T SY)$$

其中 $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$, S 是 m 阶实对称正定矩阵.





1. 证明 $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ 是 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 上的一个内积;

2. 在 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 上, 由此规定的内积便构成欧氏空间, 若 $m=1, n=4$, 且 $\mathbf{S}=(1)$, 欧氏空间 $\mathbf{R}^{1 \times 4}$ 的子空间

$$W = \{ \mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 = 0, a_3 + a_4 = 0, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{1 \times 4} \}$$

求 W 的正交补 W^\perp 的一个基.

七、(本题满分 25 分)

已知三元实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = tx_1^2 + tx_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$, 其中 t 是实参数.

1. 求二次型 f 的秩;

2. 试用正交变换化二次型 f 为标准形;

3. 当 $t > -2$ 时, 指出 $f=1$ 表示何种二次曲面?

八、(本题满分 10 分)

设 V_1^n 与 V_2^n 均是数域 \mathbf{K} 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 分别是线性空间 V_1^n 与 V_2^n 中的一个基, 又 T 是 V_1^n 到 V_2^n 的映射, 且

$$T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n) = (k_1 + k_2)\beta_1 + (k_2 + k_3)\beta_2 + \dots + (k_{n-1} + k_n)\beta_{n-1} + k_n\beta_n$$

其中 $k_i \in \mathbf{K} (i=1, 2, \dots, n)$, 证明: T 是同构映射.

九、(本题满分 20 分)

已知 x_1, x_2, x_3 是欧氏空间 V^3 的一个基, 该基的度量矩阵是

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V^3 上的线性变换 T 为

$$T(x_1) = x_2 + x_3, \quad T(x_2) = ax_1 + 2x_2 + 2x_3, \quad T(x_3) = bx_1 + x_2 + x_3$$

1. 求空间 V^3 的一个标准正交基;

2. 问 a, b 为何值时, T 是对称变换?

3. 在 T 是对称变换时, 求 V^3 的一个标准正交基, 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

十、(本题满分 10 分)

设 $n(n > 4)$ 阶块对角矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 证明: \mathbf{A} 与 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{O}_1 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_3 \end{pmatrix}$ 相

似, 其中 \mathbf{E}_2 是 2 阶单位矩阵, $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3$ 分别是 $2 \times (n-2), (n-2) \times (n-2), (n-2) \times 2$ 的零矩阵.

2020 年试题参考解答

一、1. T; 2. T; 3. F; 4. F; 5. T.

二、1. 2^8 ; 2. f_1, f_2, f_4 ; 3. $a = -\frac{1}{2}$; 4. $9^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; 5. $\frac{1}{3}(1, 1, 1)^T + k(-1, 0, 1)^T (k \text{ 任意})$.

三、解 由 $\det \mathbf{A} = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right)a^{n-1} = 0$ 得 $a = 0$ 或 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$, 此时, 齐次方程组有非零解. (4 分)

当 $a = 0$ 时, 有

$$\mathbf{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$





通解为

$$x = k_1(-2, 1, 0, \dots, 0)^T + k_2(-3, 0, 1, \dots, 0)^T + \dots + k_{n-1}(-n, 0, \dots, 0, 1)^T \quad (2 \text{ 分})$$

当 $a = -\frac{n(n+1)}{2} \neq 0$ 时, 有

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 2 & \cdots & n \\ -a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -a & & & a \end{pmatrix}$$

解得 $x_i = x_1 (i = 2, 3, \dots, n)$. (3 分) 通解为 $k(1, 1, \dots, 1)^T$ (1 分)

四、证 若 $A \in W_1 \cap W_2$, 则有 $A^T = -A, A = D + U$, 其中 $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$, U 是严格上三角矩阵, 所以 $A = O$, 故 $W_1 + W_2$ 为直和. (4 分)

又对于 $\forall A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 有

$$A = L + D + U - L^T + L^T = (L - L^T) + (L^T + D + U) \quad (4 \text{ 分})$$

其中 L 是严格下三角矩阵. 由于 $L - L^T \in W_1, L^T + D + U \in W_2$, 所以 $A \in W_1 + W_2$, 故 $\mathbf{R}^{n \times n} = W_1 \oplus W_2$. (2 分)

五、1. 利用 $\text{rank}(A - 4E) = 2$, 得 $a = 1$; (5 分)

2. 由 $(A - 4E)x = 0$ 得 $p_1 = (1, 1, 1)^T$, 又由 $(A - 4E)x = p_1$ 得 $p_2 = (0, 0, 1)^T$. (4 分) 由 $(A - 4E)x = p_2$ 得 $p_3 = (0, 1, -1)^T$ (2 分) 所以

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

使得 $P^{-1}AP = J$.

3. 因为 $J = 4E + C$, 其中 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以

$$J^k = (4E + C)^k = \begin{pmatrix} 4^k & k4^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}4^{k-2} \\ & 4^k & k4^{k-1} \\ & & 4^k \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

又有 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 故

$$A^k = PJ^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 4^k - 2k4^{k-1} - \frac{k(k-1)}{2}4^{k-2} & k4^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}4^{k-2} & k4^{k-1} \\ -2k4^{k-1} - \frac{k(k-1)}{2}4^{k-2} & 4^k + k4^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}4^{k-2} & k4^{k-1} \\ -3k4^{k-1} - \frac{k(k-1)}{2}4^{k-2} & 2k4^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}4^{k-2} & 4^k + k4^{k-1} \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

六、证 1. 对称性: $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T SY) = \text{tr}(Y^T SX) = \langle Y, X \rangle$ (2 分)

齐次性: $\langle kX, Y \rangle = \text{tr}(kX^T SY) = k\text{tr}(X^T SY) = k\langle X, Y \rangle$ (2 分)

分配性: $\langle X, Y + Z \rangle = \text{tr}(X^T S(Y + Z)) = \text{tr}(Y^T SX + Y^T SZ) =$

$$\text{tr}(Y^T SX) + \text{tr}(Y^T SZ) = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle \quad (2 \text{ 分})$$

非负性: 当 $X = O$ 时, 有 $X^T SX = O$, 所以 $\text{tr}(X^T SX) = 0$. 当 $X \neq O$ 时, 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则有 $x_i^T Sx_i \geq$

0, 且至少有一个 $x_{i_0}^T Sx_{i_0} > 0$, 故 $\text{tr}(X^T SX) = \sum_{i=1}^n x_i^T Sx_i > 0$, (4 分) 从而 $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T SY)$ 是内积.





2. W 的一个基为 $A_1 = (1, -1, 0, 0), A_2 = (0, 0, 1, -1)$. (2 分)

设 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W^\perp$, 则有 $\langle A_1, X \rangle = \langle A_2, X \rangle = 0$, 即 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$. (2 分) 求解该方程组得 W^\perp

的一个基为 $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$. (1 分)

七、解 1. 该二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$. 可求得 $\det A = (t+2)(t-1)^2$, 所以当 $t \neq -2$ 且 $t \neq -1$ 时,

二次型的秩是 3; (2 分) 当 $t = -2$ 时二次型的秩为 2; (2 分) 当 $t = 1$ 时, 二次型的秩为 1. (2 分)

2. 由 $\det(A - \lambda E) = (2+t-\lambda)(t-\lambda-1)^2 = 0$ 得 A 的特征值为

$$\lambda_1 = 2+t, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = t-1 \quad (4 \text{ 分})$$

由 $(A - (2+t)E)x = 0$ 解得 $p_1 = (1, 1, 1)^T$, 由 $(A - (t-1)E)x = 0$ 解得 $p_2 = (1, -1, 0)^T, p_3 = (1, 0, -1)^T$.

(3 分) 经正交化得 $\tilde{p}_2 = (1, -1, 0)^T, \tilde{p}_3 = (1, 1, -2)^T$, 单位化得

$$q_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)^T, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T, \quad q_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 1, -2)^T$$

正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

正交变换 $x = Qy$ 化二次型 f 为标准形

$$f = (2+t)y_1^2 + (t-1)y_2^2 + (t-1)y_3^2 \quad (2 \text{ 分})$$

3. 由 $(2+t)y_1^2 + (t-1)y_2^2 + (t-1)y_3^2 = 1$ 可知, 当 $t > 1$ 时, $f = 1$ 为椭球面; (2 分) 当 $t = 1$ 时 $f = 1$ 为两个平面; (2 分) 当 $-2 < t < 1$ 时, $f = 1$ 为双叶双曲面. (2 分)

八、解 由于

$$T(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) = (k_1 + k_2)\beta_1 + (k_2 + k_3)\beta_2 + \cdots + (k_{n-1} + k_n)\beta_{n-1} + k_n\beta_n =$$

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

所以对于任意 $\alpha, \beta \in V_1$, 不妨设它们在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标分别为

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n)^T, \quad (l_1, l_2, \cdots, l_n)^T,$$

则有

$$\begin{aligned} T(\alpha + \beta) &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 + l_1 \\ k_2 + l_2 \\ \vdots \\ k_n + l_n \end{pmatrix} = \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad (3 \text{ 分}) = \\ &= T(\alpha) + T(\beta) \end{aligned}$$





$$T(k\alpha) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kk_1 \\ kk_2 \\ \vdots \\ kk_n \end{pmatrix} = kT(\alpha) \quad (3 \text{ 分})$$

又因为

$$T(\alpha_1) = \beta_1, \quad T(\alpha_2) = \beta_1 + \beta_2, \quad \dots, \quad T(\alpha_{n-1}) = \beta_{n-2} + \beta_{n-1}, \quad T(\alpha_n) = \beta_{n-1} + \beta_n$$

所以 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

因为 A 是可逆矩阵, 所以 T 是可逆映射, 故 T 是同构映射. (2 分)

九、解 1. 正交化

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - y_1 = x_2 - x_1, \quad y_3 = x_3 \quad (3 \text{ 分})$$

再单位化

$$\frac{y_1}{\|y_1\|} = x_1, \quad \frac{y_2}{\|y_2\|} = x_2 - x_1, \quad \frac{y_3}{\|y_3\|} = x_3$$

所以空间 V^3 的一个标准正交基是 $x_1, x_2 - x_1, x_3$ (2 分)

2. 因为

$$T(x_1) = x_1 + (x_2 - x_1) + x_3$$

$$T(x_2 - x_1) = (a+1)x_1 + (x_2 - x_1) + x_3$$

$$T(x_3) = (b+1)x_1 + (x_2 - x_1) + x_3, \quad (3 \text{ 分})$$

所以 T 在标准正交基 $x_1, x_2 - x_1, x_3$ 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

由 B 为对称矩阵得 $a = 0, b = 0$. (2 分)

3. 由 $\det(B - \lambda E) = (3 - \lambda)\lambda^2 = 0$, 得 B 的特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. (2 分)

由 $(B - 3E)x = 0$ 得 $p_1 = (1, 1, 1)^T$ (2 分)

由 $Bx = 0$ 得 $p_2 = (1, -1, 0)^T, p_3 = (1, 0, -1)^T$. (2 分) 经正交单位化得

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T, \quad (2 \text{ 分})$$

故 T 在标准正交基 $\frac{1}{\sqrt{3}}(x_2 + x_3), \frac{1}{\sqrt{2}}(2x_1 - x_2), \frac{1}{\sqrt{6}}(x_2 - 2x_3)$ 下的矩阵为 $\text{diag}(3, 0, 0)$. (2 分)

十、证 设在 n 维线性空间 V 上的线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A , 则有

$$T\alpha_1 = 0, \quad T\alpha_2 = \alpha_1, \quad T\alpha_3 = 0, \quad T\alpha_4 = \alpha_3, \quad T\alpha_k = 0 (k \geq 5) \quad (4 \text{ 分})$$

取基为 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \alpha_2, \alpha_4$, 则 T 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} O_1 & E_2 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$. (4 分) 由于同一变换在不同基下的矩阵相

似, 故 A 与 $\begin{pmatrix} O_1 & E_2 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$ 相似. (2 分)

